Πανεπιστημιο Πατρων - Πολυτεχνικη Σχολη
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών
και Πληροφορικής

Αλγόριθμοι Ανάθεσης Συχνοτήτων σε Κυψελικά Δίκτυα.

Ευαγγελια Παπαϊωαννου

Διπλωματική Εργασία
στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

Τριμελης Επιτροπη: Χ.Κακλαμανης, Αναπληρωτης Καθηγητης (Επιβλεπων)
Λ. Κυρουσης, Καθηγητης
Π. Σπυρακης, Καθηγητης

Πάτρα, Ιανουάριος 2001

Περίληψη

Στη δουλειά που ακολουθεί ασχολούμαστε με επικοινωνιακά ζητήματα που ανακύπτουν σε κινητά δίκτυα τα οποία χρησιμοποιούν Τεχνολογία Πολύπλεξη Συχνότητας (Frequency Division Multiplexing (FDM)). Σε τέτοια δίκτυα, πολλοί χρήστες που βρίσκονται στην ίδια γεωγραφική περιοχή μπορούν να επικοινωνήσουν ταυτόχρονα με άλλους χρήστες του δικτύου χρησιμοποιώντας διακριτές συχνότητες. Επειδή το φάσμα των διαθέσιμων συχνοτήτων είναι περιορισμένο, έχει μεγάλη σημασία η εύρεση αποδοτικών λύσεων τόσο για το πρόβλημα ανάθεσης συχνοτήτων (Frequency Allocation Problem) όσο και για το πρόβλημα ελέγχου κλήσεων (Call Control Problem).

Στα πλαίσια του προβλήματος ανάθεσης συχνοτήτων, δεδομένων χρηστών που επιθυμούν να επικοινωνήσουν, στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του απαιτούμενου φάσματος συχνοτήτων με τέτοιον τρόπο ώστε να μπορεί να αποκατασταθεί η επικοινωνία μεταξύ των χρηστών χωρίς παρεμβολές σήματος (signal interference). Στα πλαίσια του προβλήματος ελέγχου κλήσεων, δεδομένων του φάσματος των διαθέσιμων συχνοτήτων και των χρηστών που επιθυμούν να επικοινωνήσουν, στόχος είναι η μεγιστοποίηση του αριθμού των χρηστών που επικοινωνούν. Θεωρούμε κυψελικές, επίπεδες και αυθαίρετες δικτυακές τοπολογίες και μελετούμε την on–line εκδοχή και των δύο προβλημάτων με χρήση της μεθόδου συγκριτικής ανάλυσης (competitive analysis).

Προκειμένου για το πρόβλημα της ανάθεσης συχνοτήτων σε κυψελικά δίκτυα, βελτιώνουμε τον καλύτερο γνωστό συγκριτικό λόγο απόδοσης (competitive ratio) που είναι τουλάχιστο 3 και επιτυγχάνεται από τον αλγόριθμο Fixed Allocation (Fixed Allocation algorithm). Χρησιμοποιώντας συγκριτική ανάλυση για τον άπληστο αλγόριθμο (greedy algorithm), αποδεικνύουμε ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσής του είναι τουλάχιστο 2.429 και το πολύ 2.5. Προκειμένου για το πρόβλημα ελέγχου κλήσεων σε κυψελικά δίκτυα, παρουσιάζεται ο πρώτος πιθανοτικός αλγόριθμος που δίνει καλύτερο συγκριτικό λόγο απόδοσης από τον αντίστοιχο ντετερμινιστικό. Συγκεκριμένα, ο πιθανοτικός αλγόριθμος που παρουσιάζεται έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης 2.914, δηλαδή μικρότερο από το κάτω φράγμα για ντετερμινιστικούς αλγορίθμους. Σημειώνεται ότι η ανάλυσή μας μπορεί να επεκταθεί και σε αυθαίρετα δίκτυα. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την Αρχή Minimax του Yao (Yao's Minimax Principle) αποδεικνύονται δύο κάτω φράγματα, 1.857 και 2.086 για το συγκριτικό λόγο απόδοσης πιθανοτικών αλγορίθμων ελέγχου κλήσεων, για κυψελικά και για αυθαίρετα επίπεδα δίκτυα, αντίστοιχα.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Κυψελικά δίκτυα

Στην ερευνητική περιοχή των κινητών επικοινωνιών (mobile communications) και συνδυάζει ασύρματες και υψηλών ταχυτήτων δικτυακές τεχνολογίες έχει πραγματοποιηθεί τα τελευταία χρόνια αλματώδης πρόοδος. Αναμένεται ότι στο προσεχές μέλλον οι χρήστες κινητών υπολογιστικών μονάδων θα έχουν τη δυνατότητα πρόσβασης σε ένα μεγάλο εύρος υπηρεσιών που θα είναι διαθέσιμες πάνω από δίκτυα επικοινωνίας.

Στα πλαίσια μιας αρχιτεκτονικής προσέγγισης, ένα κυψελικό δίκτυο χτίζεται σε μια γεωγραφική περιοχή χωρισμένη σε μικρότερα τμήματα, καθένα από τα οποία αποτελεί την περιοχή εμβέλειας (calling area) ενός σταθμού βάσης (base station). Οι σταθμοί βάσης διασυνδέονται μέσω δικτύου υψηλής ταχύτητας η τοπολογία του οποίου δε μας απασχολεί στη δουλειά που παρουσιάζουμε στη συνέχεια.

Η περιοχή εμβέλειας ενός σταθμού βάσης καλείται κυψέλη (cell). Κάθε σταθμός βάσης μπορεί να εξυπηρετεί κλήσεις (calls) που παρουσιάζονται στην κυψέλη του, αναθέτωντας σε αυτές διακριτές συχνότητες έτσι ώστε να αποφεύγονται οι ραδιοπαρεμβολές. Οι ραδιοπαρεμβολές εμφανίζονται όταν σε δύο κλήσεις της ίδιας ή γειτονικών κυψελών ανατεθεί η ίδια συχνότητα. Στα κυψελικά δίκτυα ένα περιορισμένο φάσμα συχνοτήτων είναι διαθέσιμο για την εξυπηρέτηση των κλήσεων και η αποδοτική διαχείριση του διαθέσιμου εύρους ζώνης (bandwidth) παίζει καθοριστικό ρόλο για την ομαλή λειτουργία του δικτύου.

Όταν δύο χρήστες κινητών υπολογιστικών μονάδων A και B επιθυμούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η αποκατάσταση ενός μονοπατιού μεταξύ των σταθμών βάσης των κυψελών στις οποίες βρίσκονται οι χρήστες A και B. Στη συνέχεια, η επικοινωνία πραγματοποιείται σε τρία βήματα:

α. ασύρματη επικοινωνία μεταξύ του χρήστη A και του σταθμού βάσης της περιοχής στην οποία βρίσκεται ο A,

β. επικοινωνία μεταξύ των σταθμών βάσης των περιοχών που βρίσκονται οι A και B, και γ. ασύρματη επικοινωνία μεταξύ του B και του σταθμού βάσης του.

Επομένως, προκειμένου να πραγματοποιηθεί μετάδοση ενός μηνύματος από τον A στο B είναι αναγκαία η συμμετοχή τουλάχιστο ενός σταθμού βάσης ακόμα και στην περίπτωση που και οι δύο χρήστες βρίσκονται στην ίδια κυψέλη.

Η ταυτόχρονη επικοινωνία πολλών χρηστών σε ένα δίκτυο επιτυγχάνεται μέσω της τεχνικής πολύπλεξης συχνοτήτων (FDM). Ο σταθμός βάσης είναι υπεύθυνος για την ανάθεση διακριτών συχνοτήτων από ένα διαθέσιμο φάσμα με τέτοιον τρόπο ώστε να μη δημιουργούνται ραδιοπαρεμβολές στην ίδια κυψέλη ή μεταξύ γειτονικών κυψελών.

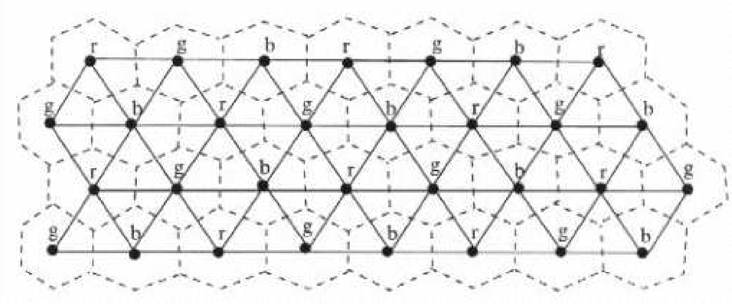
Θεωρώντας ότι:

α. οι σταθμοί βάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο δίκτυο, και

β. η περιοχή εμβέλειας κάθε σταθμού βάσης είναι ένας κύκλος, τον οποίο για λόγους απλότητας θεωρούμε κανονικό εξάγωνο,

η δικτυακή τοπολογία που υιοθετείται συνήθως στη μελέτη ανάλογων προβλημάτων είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του τριγωνικού πλέγματος (βλ. σχ. 1.1).

Σε κάθε κυψελικό δίκτυο αντιστοιχεί ένας γράφος ραδιοπαρεμβολής (interference graph), οι κορυφές του οποίου αντιστοιχούν σε κυψέλες ενώ υπάρχει στο γράφο ακμή (u, v) μεταξύ δύο κορυφών u και v αν και μόνον αν οι κυψέλες που αντιστοιχούν στις κορυφές αυτές είναι γειτονικές. Για λόγους γεωμετρίας, ένας τέτοιος γράφος καλείται εξαγωνικός (hexagon graph).



Σχήμα 1.1: *Ένα κυψελικό δίκτυο και ο αντίστοιχος (εξαγωνικός) γράφος παρεμβολής.*

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον όρο ''κυψελικά'' προκειμένου για δίκτυα με εξαγωνικούς γράφους ραδιοπαρεμβολής, όπως αυτό που παρουσιάζεται στο σχήμα 1.1. Στην περίπτωση που οι σταθμοί βάσης δεν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο δίκτυο, υιοθετούνται αυθαίρετες δικτυακές τοπολογίες για το γράφο ραδιοπαρεμβολής. Έτσι, χρησιμοποιούμε τους όρους ''επίπεδα'' και ''αυθαίρετα'' προκειμένου για δίκτυα με επίπεδους και αυθαίρετους γράφους ραδιοπαρεμβολής, αντίστοιχα.

1.2 Προβλήματα επικοινωνίας

Δύο είναι τα βασικότερα επικοινωνιακά προβλήματα που ανακύπτουν σε κυψελικά δίκτυα:

- Το πρόβλημα *ανάθεσης συχνοτήτων* (frequency allocation) που αφορά στη δέσμευση μιας διακριτής συχνότητας για κάθε χρήστη του δικτύου έτσι ώστε να μην υπάρχουν ραδιοπαρεμβολές και να ελαχιστοποιείται ο συνολικός αριθμός των χρησιμοποιούμενων συχνοτήτων.
- Το πρόβλημα *ελέγχου κλήσεων*(call control) σε ένα δίκτυο που υποστηρίζει ένα φάσμα w διαθέσιμων συχνοτήτων που αφορά στην ανάθεση συχνοτήτων στους χρήστες του δικτύου έτσι ώστε να μεγιστοποιείται ο αριθμός των χρηστών που εξυπηρετούνται, χωρίς να υπάρχουν ραδιοπαρεμβολές.

Υποθέτουμε ότι οι κλήσεις που αντιστοιχούν σε χρήστες που επιθυμούν να επικοινωνήσουν εμφανίζονται στις κυψέλες του δικτύου on–line και όταν εμφανίζεται μια κλήση, ένας on–line αλγόριθμος ανάθεσης συχνοτήτων την αποδέχεται αναθέτοντάς της μια συχνότητα, ενώ ένας αλγόριθμος ελέγχου κλήσεων αποφασίζει είτε να την αποδεχτεί (αναθέτοντάς της μια συχνότητα) είτε να την απορρίψει. Από τη στιγμή πάντως που μια κλήση γίνει αποδεκτή, δε υπάρχει δυνατότητα απόρριψής της στο μέλλον (preemption) ούτε δυνατότητα αλλαγής της συχνότητας που της ανατέθηκε. Υποθέτουμε ότι οι κλήσεις έχουν άπειρη διάρκεια. Η υπόθεση αυτή είναι ισοδύναμη με τη θεώρηση κλήσεων ίδιας διάρκειας.

1.3 Συγκριτική ανάλυση (Competitive Analysis)

Η εκτίμηση της απόδοσης των on–line αλγορίθμων που παρουσιάζουμε για διάφορα προβλήματα γίνεται με χρήση Συγκριτικής Ανάλυσης (Competitive Analysis [24]). Συγκεκριμένα, για το πρόβλημα που διαπραγματευόμαστε, δεδομένης μιας ακολουθίας κλήσεων που παρουσιάζονται σε έναν on–line αλγόριθμο $\mathcal{A}$, η απόδοσή του συγκρίνεται με αυτή του βέλτιστου αλγορίθμου $\mathcal{OPT}$. Προκειμένου για αλγορίθμους ανάθεσης συχνοτήτων, καλούμε $C_{\mathcal{A}}(\sigma)$ το κόστος εκτέλεσης του on–line αλγορίθμου $\mathcal{A}$ για την ακολουθία κλήσεων σ και $C_{\mathcal{OPT}}(\sigma)$ το κόστος εκτέλεσης του βέλτιστου αλγορίθμου $\mathcal{OPT}$ για την ίδια ακολουθία κλήσεων. Με τον όρο κόστος εννοούμε τον αριθμό των συχνοτήτων που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος.

Έστω $\mathcal{A}$ ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος. Ορίζουμε το συγκριτικό λόγο απόδοσής του ρ ως εξής:

$$\rho = \max_{\sigma} \frac{C_{\mathcal{A}}(\sigma)}{C_{\mathcal{OPT}}(\sigma)},$$

όπου το μέγιστο λαμβάνεται μεταξύ όλων των δυνατών ακολουθιών κλήσεων.

Αν ο $\mathcal{A}$ είναι ένας πιθανοτικός αλγόριθμος, ο συγκριτικός λόγος απόδοσής του ορίζεται σαν:

$$\rho = \max_{\sigma} \frac{\mathcal{E}[C_{\mathcal{A}}(\sigma)]}{C_{\mathcal{OPT}}(\sigma)},$$

όπου $\mathcal{E}[C_{\mathcal{A}}(\sigma)]$ είναι η μέση τιμή του αριθμού των χρησιμοποιούμενων συχνοτήτων από τον αλγόριθμο και το μέγιστο λαμβάνεται μεταξύ όλων των δυνατών ακολουθιών κλήσεων.

Προκειμένου για αλγορίθμους ελέγχου κλήσεων, έστω $B_{\mathcal{A}}(\sigma)$ το κέρδος από την εκτέλεση ενός on–line αλγορίθμου $\mathcal{A}$ για την ακολουθία κλήσεων σ, δηλαδή για τον αριθμό κλήσεων σ που γίνονται αποδεκτές από τον αλγόριθμο $\mathcal{A}$ και $B_{\mathcal{OPT}}(\sigma)$ το κέρδος από την εκτέλεση του βέλτιστου αλγορίθμου $\mathcal{A}_{\mathcal{OPT}}$. Στην περίπτωση που ο $\mathcal{A}$ είναι ντετερμινιστικός, ορίζουμε ως συγκριτικό λόγο απόδοσής του ρ τον

$$\rho = \max_{\sigma} \frac{B_{\mathcal{OPT}}(\sigma)}{B_{\mathcal{A}}(\sigma)},$$

όπου το μέγιστο λαμβάνεται μεταξύ όλων των πιθανών ακολουθιών κλήσεων. Στην περίπτωση που ο $\mathcal{A}$ είναι πιθανοτικός αλγόριθμος, ορίζουμε ως συγκριτικό λόγο απόδοσης ρ το

$$\rho = \max_{\sigma} \frac{B_{\mathcal{OPT}}(\sigma)}{\mathcal{E}[B_{\mathcal{A}}(\sigma)]},$$

όπου $\mathcal{E}[B_{\mathcal{A}}(\sigma)]$ είναι η μέση τιμή του αριθμού κλήσεων που γίνονται δεκτές από τον $\mathcal{A}$, και το μέγιστο λαμβάνεται μεταξύ όλων των δυνατών ακολουθιών κλήσεων που παρουσιάζονται στον αλγόριθμο.

Συνήθως, συγκρίνουμε την απόδοση ντετερμινιστικών αλγορίθμων με *off–line αντιπάλους* (off–line adversaries), δηλαδή αντιπάλους που γνωρίζουν εκ των προτέρων τη συμπεριφορά του ντετερμινιστικού αλγορίθμου. Για πιθανοτικούς αλγορίθμους θεωρούμε *αντιπάλους "χωρίς μνήμη"* (oblivious adversaries) των οποίων η γνώση περιορίζεται στην κατανομή πιθανότητας των τυχαίων επιλογών του πιθανοτικού αλγορίθμου.

1.4 Προηγούμενα γνωστά αποτελέσματα

Το πρόβλημα της ανάθεσης συχνοτήτων σε κυψελικά δίκτυα έχει τύχει ιδιαίτερης ερευνητικής προσοχής. Συγκεκριμένα, η στατική εκδοχή του προβλήματος έχει μελετηθεί στο [20] και στο [19], ενώ το [12] διαπραγματεύεται την on–line εκδοχή του προβλήματος. Οι Janssen et al. [12] χρησιμοποιούν συγκριτική ανάλυση για την εκτίμηση της απόδοσης αρκετών αλγορίθμων ανάθεσης συχνοτήτων και αποδεικνύουν άνω και κάτω φράγματα. Μεταξύ άλλων, αποδεικνύουν ότι δεν υπάρχει on–line ντετερμινιστικός αλγόριθμος ανάθεσης συχνοτήτων που να μπορεί να πετύχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από 2 ενώ αναφέρουν τον κλασικό Fixed Allocation αλγόριθμο που επιτυγχάνει συγκριτικό λόγο απόδοσης 3.

Η στατική εκδοχή του προβλήματος ελέγχου κλήσεων μοιάζει με το γνωστό πρόβλημα ανεύρεσης του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου (maximum independent set) σε γράφους. Η on–line εκδοχή του προβλήματος μελετήθηκε στα [1], [2], [3], [17], [21] και [4]. Στα [1], [2] και [17] μελετήθηκε το πρόβλημα ελέγχου κλήσεων στα πλαίσια οπτικών δικτύων. Οι Pantziou et al. [21] παρουσιάζουν άνω φράγματα για επίπεδα και αυθαίρετα δίκτυα. Εφαρμόζοντας την τεχνική "Classify and Randomly Select" που παρουσιάστηκε στα [2] και [21] σε κυψελικά δίκτυα, προκύπτει ένας πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου κλήσεων με συγκριτικό λόγο απόδοσης 3. Συνήθως, η συγκριτική ανάλυση αλγορίθμων ελέγχου κλήσεων εφαρμόζεται σε δίκτυα οπυ υποστηρίζουν μια συχνότητα. Οι Awerbuch et al. [1] παρουσιάζουν έναν απλό τρόπο για το μετασχηματισμό αλγορίθμων που σχεδιάστηκαν για δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα σε αλγορίθμους για δίκτυα που υποστηρίζουν αυθαίρετα πολλές συχνότητες, με μικρή αύξηση του συγκριτικού λόγου απόδοσης. Κάτω φράγματα για αλγορίθμους ελέγχου κλήσεων σε αυθαίρετα δίκτυα παρουσιάζονται στο [3]. Στο [4] μελετώνται αλγόριθμοι ελέγχου κλήσεων σε κυψελικά δίκτυα και αποδεικνύεται ένα απλό κάτω φράγμα για την απόδοση πιθανοτικών αλγορίθμων ελέγχου κλήσεων.

1.5 Σύνοψη της εργασίας

Σε αυτή την εργασία ασχολούμαστε με την on–line εκδοχή των προβλημάτων ανάθεσης συχνοτήτων και ελέγχου κλήσεων. Για το πρόβλημα της ανάθεσης συχνοτήτων σε κυψελικά δίκτυα βελτιώνουμε το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα που επιτυγχάνεται από τον Fixed Allocation αλγόριθμο, παρουσιάζοντας μια σχεδόν αυστηρή συγκριτική ανάλυση για τον άπληστο αλγόριθμο ανάθεσης συχνοτήτων (Κεφάλαιο 2). Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσής του είναι μεταξύ 2.429 και 2.5. Για το πρόβλημα ελέγχου κλήσεων παρουσιάζουμε τους πρώτους πιθανοτικούς αλγορίθμους με συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από το αντίστοιχο κάτω φράγμα για ντετερμινιστικούς αλγορίθμους (Κεφάλαιο 3.1). Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε δύο πιθαμοτικούς αλγορίθμους με συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ 2.97 και 2.914, αντίστοιχα. Αυτά τα άνω φράγματα ισχύουν για δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα αλλά συνηγορούν υπέρ του ότι με χρήση τυχαιότητας τα γνωστά φράγματα για δίκτυα με αυθαίρετα πολλές συχνότητες μπορούν να βελτιωθούν. Η ανάλυσή μας έχει ενδιαφέρουσες επεκτάσεις σε δίκτυα που υποστηρίζουν αυθαίρετα πολλές συχνότητες. Επίσης, χρησιμοποιώντας την αρχή Minimax αποδεικνύουμε δύο κάτω φράγματα, 1.857 και 2.086 για το συγκριτικό λόγο απόδοσης αλγορίθμων ελέγχου κλήσεων σε κυψελικά και επίπεδα δίκτυα, αντίστοιχα (Κεφάλαιο 3.2). Οι αλγόριθμοι που παρουσιάζουμε και για τα δύο προβλήματα είναι απλοί και μπορούν εύκολα να υλοποιηθούν με μικρή επικοινωνιακή επιβάρυνση (ανταλλαγή μηνυμάτων) μεταξύ των σταθμών του δικτύου.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται σε αυτή την εργασία επιτεύχθηκαν σε συνεργασία με τον Αναπληρωτή Καθηγητή Χρήστο Κακλαμάνη και το μεταπτυχιακό φοιτητή Γιάννη Καραγιάννη και ανακοινώθηκαν [5] στο συνέδριο SPAA 2000.

Κεφάλαιο 2

Ο άπληστος αλγόριθμος ανάθεσης συχνοτήτων

Ο αλγόριθμος Fixed–Allocation [12] χρησιμοποιεί το γεγονός ότι ο γράφος ραδιοπαρεμβολής ενός κυψελικού δικτύου μπορεί να χρωματιστεί με τρία χρώματα τα οποία ονομάζουμε χρώματα βάσης. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τρία σταθερά σύνολα συχνοτήτων, ένα για κάθε χρώμα βάσης. Μια κυψέλη που έχει χρώμα βάσης 1 χρησιμοποιεί συχνότητες από το πρώτο σύνολο για τις κλήσεις που εμφανίζονται σε αυτή ενώ μια κυψέλη με χρώμα βάσης 2 ή 3 χρησιμοποιεί συχνότητες από το δεύτερο ή το τρίτο σύνολο αντίστοιχα. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος Fixed–Allocation χρησιμοποιεί το πολύ τριπλάσιες συχνότητες από αυτές που θα χρησιμοποιούσε ο βέλτιστος off–line αλγόριθμος.

Ο άπληστος αλγόριθμος, που περιγράφεται στη συνέχεια, είναι ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος για on–line ανάθεση συχνοτήτων. Σύμφωνα με τον άπληστο αλγόριθμο, οι συχνότητες αντιστοιχούν σε θετικούς ακέραιους $1, 2, \ldots$. Όταν φτάνει μια καινούρια κλήση ανατίθεται σε αυτή η μικρότερη διαθέσιμη συχνότητα έτσι ώστε να μην υπάρχουν παρεμβολές με κλήσεις της ίδιας η γειτονικών κυψελών, δηλαδή η συχνότητα αυτή να μην έχει ανατεθεί σε κλήσεις της ίδιας ή γειτονικών κυψελών. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια σχεδόν αυστηρή (tight) συγκριτική ανάλυση του άπληστου αλγορίθμου.

2.1 Ανάλυση της απόδοσης του άπληστου αλγόριθμου

Στην ενότητα αυτή ποαρουσιάζουμε ένα άνω φράγμα για την απόδοση του άπληστου αλγορίθμου ανάθεσης συχνοτήτων. Συγκεκριμένα:

Θεώρημα 1. *Ο άπληστος αλγόριθμος ανάθεσης συχνοτήτων έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ* 2.5 *απέναντι σε έναν off–line αντίπαλο, όταν εφαρμόζεται σε κυψελικά δίκτυα.*

Απόδειξη. Έστω σ μια ακολουθία κλήσεων που παρουσιάζεται σε ένα κυψελικό δίκτυο και έστω D ο μέγιστος αριθμός κλήσεων σε κάθε τριάδα αμοιβαία γειτονικών κυψελών του δικτύου. Προφανώς, ο D είναι αποτελεί ένα κάτω φράγμα για τον αριθμό των συχνοτήτων που απαιτούνται για μια βέλτιστη ανάθεση συχνοτήτων στην ακολουθία σ.

Θεωρούμε ότι ο άπληστος αλγόριθμος εκτελείται για την ακολουθία κλήσεων σ, και έστω c_0 η κυψέλη που περιέχει την κλήση στην οποία ανατέθηκε η υψηλότερη συχνότητα a_0. Θα αποδείξουμε ότι $a_0 \leq 2.5D$, δηλαδή ότι ο άπληστος αλγόριθμος είναι το πολύ 2.5–ανταγωνιστικός σε σχέση με έναν off–line αντίπαλο.

Συμβολίζουμε με x_0 τον αριθμό των κλήσεων στην κυψέλη c_0. Με βάση τον ορισμό του άπληστου αλγορίθμου, αφού η συχνότητα a_0 έχει ανατεθεί σε μια κλήση της κυψέλης c_0, οι συχνότητες $1, ..., a_0 - 1$ θα πρέπει επίσης να έχουν ανατεθεί σε κλήσεις της κυψέλης c_0 καθώς και των γειτονικών της κυψελών. Σημειώνεται ότι ο αριθμός όλων αυτών των κλήσεων είναι το πολύ $3D - 2x_0$. Κατά συνέπεια, πετυχαίνουμε τον ακόλουθο περιορισμό για τη x_0.

$$x_0 \leq \frac{3D - a_0}{2} \tag{2.1}$$

Καλούμε $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ τις έξι κυψέλες που περιβάλουν την c_0, έτσι ώστε για την αντίστοιχη υψηλότερη συχνότητα $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ που έχει ανατεθεί σε κλήσεις αυτών των κυψελών να ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$a_0 > a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6$$

Συμβολίζουμε με $y_i(j)$, για $0 \leq i \neq j \leq 6$, τον αριθμό των κλήσεων στην κυψέλη c_j στις οποίες έχουν ανατεθεί υψηλότερες συχνότητες από την a_i. Τότε είναι προφανές ότι ισχύει

$$y_i(j) \leq x_j, \text{ για } 0 \leq i \neq j \leq 6.$$

Έστω ότι η συχνότητα a_1 έχει ανατεθεί σε κάποια κλήση της κυψέλης c_1. Τότε είναι $a_1 = a_0 - y_1(0)$. Επιπλέον, το a_1 είναι ένα άνω φράγμα για τον αριθμό των κλήσεων στην c_1 και στις κυψέλες που την περιβάλλουν, αν εξαιρεθούν οι $y_1(0)$ κλήσεις της c_0 (στις οποίες έχουν ανατεθεί υψηλότερες συχνότητες από την a_1). Τότε είναι:

$$x_1 \leq \frac{3D - a_0}{2} \tag{2.2}$$

Για τη συχνότητα a_2 που έχει ανατεθεί σε κάποια κλήση της κυψέλης c_2, είναι:

$$a_2 \geq a_0 - y_2(0) - y_2(1) \tag{2.3}$$

Διακρίνουμε δύο βασικές περιπτώσεις.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ι: Η κυψέλη c_2 είναι γειτονική με την c_1.

Σ' αυτή την περίπτωση, το a_2 είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό των κλήσεων στη c_2 και στις κυψέλες που την περιβάλλουν, αν εξαιρέσουμε τις $y_2(0)$ κλήσης της κυψέλης c_0 καθώς και τις

$y_2(1)$ κλήσεις της c_1 (στις οποίες έχουν ανατεθεί υψηλότερες συχνότητες από την a_2). Ο αριθμός των κλήσεων στην c_2 και στις κυψέλες που την περιβάλλουν είναι το πολύ $2D - x_2 + x_0 + x_1$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.3), φαίνεται ότι

$$x_2 \leq 2D + x_0 + x_1 - a_0 \tag{2.4}$$

Σημειώνεται ότι ο αριθμός των κλήσεων στην c_0 και στις κυψέλες που την περιβάλλουν και, ο οποίος αποτελεί ένα άνω φράγμα για την a_0, είναι το πολύ $2D - x_0 + x_1 + x_2$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2) και (2.4), δείχνουμε ότι:

$$\begin{aligned} a_0 &\leq 2D - x_0 + x_1 + x_2 \\ &\leq 4D + 2x_1 - a_0 \\ &\leq 7D - 2a_0 \\ &\Rightarrow a_0 \leq \tfrac{7D}{3}. \end{aligned}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙ: Η κυψέλη c_2 δεν είναι γειτονική με την c_1.

Σ' αυτή την περίπτωση, το a_2 είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό των κλήσεων στην c_2 και στις κυψέλες που την περιβάλλουν, αν εξαιρέσουμε τις $y_2(0)$ κλήσεις της c_0 (στις οποίες έχουν ανατεθεί υψηλότερες συχνότητες από την a_2). Ο αριθμός των κλήσεων στην c_2 και στις κυψέλες που την περιβάλλουν είναι το πολύ $3D - 2x_2$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.3), λαμβάνουμε:

$$x_2 \leq \frac{3D - a_0 + y_2(1)}{2} \tag{2.5}$$

Για τη συχνότητα a_3 που έχει ανατεθεί σε κάποια κλήση της κυψέλης c_3, είναι:

$$a_3 \geq a_0 - y_3(0) - y_3(1) - y_3(2) \tag{2.6}$$

Διακρίνουμε τώρα μεταξύ των ακόλουθων τριών περιπτώσεων.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙ.1: Η κυψέλη c_3 είναι γειτονική με την c_1 (και ενδεχομένως με την c_2).

Στην περίπτωση αυτή, το a_3 είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό των κλήσεων στην c_3 και των κυψελών που την περιβάλλουν, αν εξαιρέσουμε τις $y_3(0)$ κλήσεις της κυψέλης c_0 και τις $y_3(1)$ κλήσεις της c_1 (στις οποίες έχουν ανατεθεί υψηλότερες συχνότητες από την a_3). Ο αριθμός των κλήσεων στην c_3 και στις γειτονικές της κυψέλες είναι το πολύ $2D - x_3 + x_0 + x_1$. Χρησιμοποιώντας την (2.6), προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα:

$$x_3 \leq 2D + x_0 + x_1 + y_3(2) - a_0 \tag{2.7}$$

Σημειώνεται ότι ο αριθμός των κλήσεων στην c_0 και στις γειτονικές της κυψέλες που είναι άνω φραγμένος από το a_0, είναι το πολύ $2D - x_0 + x_1 + x_3$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2), (2.5), (2.7), και το γεγονός ότι $y_3(2) \leq x_2$ και $y_2(1) \leq x_1$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} a_0 &\leq 2D - x_0 + x_1 + x_3 \\ &\leq 4D + 2x_1 + y_3(2) - a_0 \\ &\leq 4D + 2x_1 + x_2 - a_0 \\ &\leq \frac{11D}{2} + 2x_1 + \frac{y_2(1)}{2} - \frac{3a_0}{2} \\ &\leq \frac{11D}{2} + \frac{5x_1}{2} - \frac{3a_0}{2} \\ &\leq \frac{37D}{4} - \frac{11a_0}{4} \Rightarrow \\ a_0 &\leq \frac{37D}{15}. \end{aligned}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙ.2: Η κυψέλη c_3 είναι γειτονική με την c_2 (αλλά όχι με την c_1).

Σ' αυτή την περίπτωση, το a_3 είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό των κλήσεων στην c_3 και στις γειτονικές της κυψέλες, αν εξαιρέσουμε τις $y_3(0)$ κλήσεις της c_0 και τις $y_3(2)$ κλήσεις της c_2 (στις οποίες έχουν ανατεθεί υψηλότερες συχνότητες από την a_3). Ο αριθμός των κλήσεων στην c_3 και στις γειτονικές της κυψέλες είναι το πολύ $2D - x_3 + x_0 + x_2$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.6), προκύπτει ότι:

$$x_3 \leq 2D + x_0 + x_2 + y_3(1) - a_0 \tag{2.8}$$

Σημειώνεται ότι ο αριθμός των κλήσεων στην c_0 και στις γειτονικές της κυψέλες που είναι άνω φραγμένος από το a_0, είναι το πολύ $2D - x_0 + x_2 + x_3$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2), (2.5), (2.8), και το γεγονός ότι $y_3(1) \leq x_1$ και $y_2(1) \leq x_1$, προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\begin{aligned} a_0 &\leq 2D - x_0 + x_2 + x_3 \\ &\leq 4D + 2x_2 + y_3(1) - a_0 \\ &\leq 4D + x_1 + 2x_2 - a_0 \\ &\leq 7D + x_1 + y_2(1) - 2a_0 \\ &\leq 7D + 2x_1 - 2a_0 \\ &\leq 10D - 3a_0 \Rightarrow \\ a_0 &\leq \frac{5D}{2}. \end{aligned}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙ.3: Η κυψέλη c_3 δεν είναι γειτονική με καμία από τις c_1 και c_2.

Σ' αυτή την περίπτωση, το a_3 είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό των κλήσεων στην c_3 και στις γειτονικές της κυψέλες, αν εξαιρέσουμε τις $y_3(0)$ κλήσεις στην c_0 (στις οποίες έχουν ανατεθεί υψηλότερες συχνότητες από την a_3). Ο αριθμός των κλήσεων στην c_3 και στις γειτονικές της κυψέλες είναι το πολύ $3D-2x_3$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.6), προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα:

$$x_3 \leq \frac{3D - a_0 + y_3(1) + y_3(2)}{2} \tag{2.9}$$

Για τη συχνότητα a_4 που έχει ανατεθεί σε κάποια κλήση της κυψέλης c_4, είναι:

$$a_4 \geq a_0 - y_4(0) - y_4(1) - y_4(2) - y_4(3) \tag{2.10}$$

Όπως και προηγουμένως, διακρίνουμε τρεις υποπεριπτώσεις:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ II.3.Α: Η κυψέλη c_4 είναι γειτονική και με τη c_1 και με τη c_2.

Σ' αυτή την περίπτωση, το a_4 είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό των κλήσεων στην c_4 και στις γειτονικές της κυψέλες, αν εξαιρέσουμε τις $y_4(0)$ κλήσεις στην c_0, τις $y_4(1)$ κλήσεις στην c_1, και τις $y_4(2)$ κλήσεις της c_2 (στις οποίες έχουν ανατεθεί υψηλότερες συχνότητες από την a_4). Ο αριθμός των κλήσεων στην c_4 και στις γειτονικές της κυψέλες είναι το πολύ $2D - x_4 + x_0 + x_1$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.10), προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα:

$$x_4 \leq 2D + x_0 + x_1 + y_4(3) - a_0 \tag{2.11}$$

Για τη συχνότητα a_4 που έχει ανατεθεί σε κάποια κλήση της κυψέλης c_4, είναι:

$$a_4 \geq a_0 - y_4(0) - y_4(1) - y_4(2) - y_4(3) \tag{2.12}$$

Σημειώνεται ότι ο αριθμός των κλήσεων στις κυψέλες c_5 και c_6 οι οποίες είναι γειτονικές με την c_3 είναι $x_5, x_6 \leq D - x_0 - x_3$. Κατά συνέπεια, ο αριθμός των κλήσεων στην c_0 και στις γειτονικές της κυψέλες που είναι άνω φραγμένος από το a_0, είναι το πολύ $2D - x_0 - x_3 + x_1 + x_2 + x_4$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2), (2.5), (2.9), (2.11), καθώς και το γεγονός ότι $y_4(3) \leq x_3$ και $y_2(1) \leq x_1$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
a_0 &\leq 2D - x_0 - x_3 + x_1 + x_2 + x_4 \\
&\leq 4D - x_3 + 2x_1 + x_2 + y_4(3) - a_0 \\
&\leq \frac{11D}{2} + 2x_1 + \frac{y_2(1)}{2} - \frac{3a_0}{2} \\
&\leq \frac{11D}{2} + \frac{5x_1}{2} - \frac{3a_0}{2} \\
&\leq \frac{37D}{4} - \frac{11a_0}{4} \Rightarrow \\
a_0 &\leq \frac{37D}{15}.
\end{aligned}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙ.3.β: Η κυψέλη c_4 είναι γειτονική με την c_1 και με την c_3.

Στην περίπτωση αυτή, το a_4 είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό των κλήσεων στην c_4 και στις γειτονικές της κυψέλες, αν εξαιρέσουμε τις $y_4(0)$ κλήσεις της c_0, τις $y_4(1)$ κλήσεις της c_1, και τις $y_4(3)$ κλήσεις της c_3 (στις οποίες έχουν ανατεθεί υψηλότερες συχνότητες από την a_4). Ο αριθμός των κλήσεων στην c_4 και στις κυψέλες που την περιβάλλουν είναι το πολύ $2D - x_4 + x_0 + x_1$. χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.10), προκύπτει ότι:

$$x_4 \leq 2D + x_0 + x_1 + y_4(2) - a_0 \tag{2.13}$$

Σημειώνεται ότι ο αριθμός των κλήσεων στην c_0 και στις κυψέλες που την περιβάλλουν που είναι άνω φραγμένος από το a_0, είναι το πολύ $2D - x_0 + x_1 + x_4$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2), (2.5), (2.9), (2.12), και το γεγονός ότι: $y_4(2) \leq x_2$ και $y_2(1) \leq x_1$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
a_0 &\leq 2D - x_0 + x_1 + x_4 \\
&\leq 4D + 2x_1 + y_4(2) - a_0 \\
&\leq 4D + 2x_1 + x_2 - a_0 \\
&\leq \frac{11D}{2} + 2x_1 + \frac{y_2(1)}{2} - \frac{3a_0}{2} \\
&\leq \frac{11D}{2} + \frac{5x_1}{2} - \frac{3a_0}{2} \\
&\leq \frac{37D}{4} - \frac{11a_0}{4} \Rightarrow \\
a_0 &\leq \frac{37D}{15}.
\end{aligned}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙ.3.γ: Η κυψέλη c_4 είναι γειτονική με την c_2 και την c_3.

Στην περίπτωση αυτή, το a_4 είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό των κλήσεων στη c_4 και στις κυψέλες που την περιβάλλουν, αν εξαιρέσουμε τις $y_4(0)$ κλήσεις της c_0, τις $y_4(2)$ κλήσεις της c_2, και τις $y_4(3)$ κλήσεις της c_3 (στις οποίες έχουν ανατεθεί υψηλότερες συχνότητες από την a_4). Ο αριθμός των κλήσεων στην c_4 και στις κυψέλες που την περιβάλλουν είναι το πολύ $2D - x_4 + x_0 + x_2$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.10), προκύπτει ότι:

$$x_4 \leq 2D + x_0 + x_2 + y_4(1) - a_0 \tag{2.14}$$

Σημειώνεται ότι ο αριθμός των κλήσεων στην c_0 και στις κυψέλες που την περιβάλλουν που είναι άνω φραγμένος από το a_0, είναι το πολύ $2D - x_0 + x_2 + x_4$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

(2.2), (2.5), (2.9), (2.13), και το γεγονός ότι $y_4(1) \leq x_1$ και $y_2(1) \leq x_1$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
a_0 &\leq 2D - x_0 + x_2 + x_4 \\
&\leq 4D + 2x_2 + y_4(1) - a_0 \\
&\leq 4D + x_1 + 2x_2 - a_0 \\
&\leq \; \leq 7D + x_1 + y_2(1) - 2a_0 \\
&\leq 7D + 2x_1 - 2a_0 \\
&\leq 10D - 3a_0 \Rightarrow \\
a_0 &\leq \frac{5D}{2}.
\end{aligned}$$

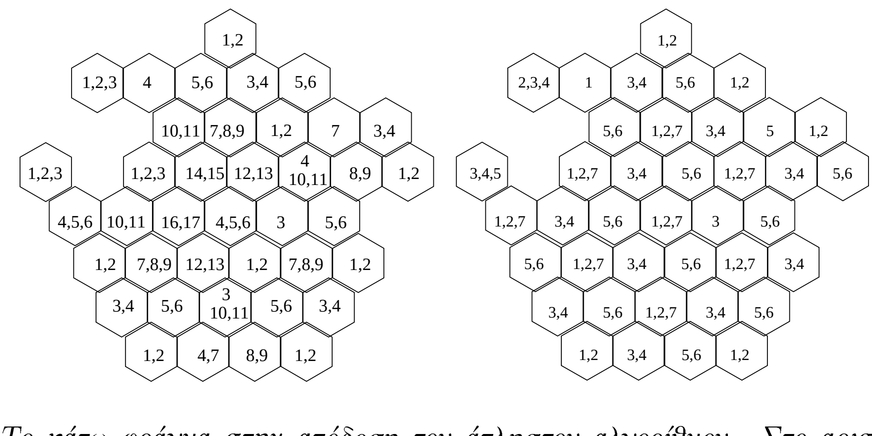
Σε κάθε περίπτωση είναι $a_0 \leq 2.5D$. Επομένως αποδεικνύεται το θεώρημα. □

2.2 Κάτω φράγμα για την απόδοση του άπληστου αλγορίθμου

Στη συνέχεια δίνουμε ένα κάτω φράγμα για την απόδοση του άπληστου αλγορίθμου. Συγκεκριμένα:

Θεώρημα 2. *Ο άπληστος αλγόριθμος έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης τουλάχιστο* 2.429 *απέναντι σε έναν off–line αντίπαλο, όταν εφαρμόζεται σε κυψελικά δίκτυα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα κυψελικό δίκτυο και μια ακολουθία κλήσεων σ' που φαίνεται στο αριστερό μέρος του σχήματος 2.1. Στις κλήσεις που εμφανίζονται στο βήμα 1 ανατίθεται η συχνότητα 1. Σε κάθε ένα από τα ακόλουθα βήματα $2 \leq i \leq 17$, ο άπληστος αλγόριθμος αναθέτει σε όλες τις κλήσεις που εμφανίζονται στο βήμα i τη συχνότητα i, αφού οι συχνότητες $1, 2, ..., i-1$ χρησιμοποιούνται ήδη από κλήσεις στην ίδια ή σε γειτονικές κυψέλες.



Σχήμα 2.1: *Το κάτω φράγμα στην απόδοση του άπληστου αλγορίθμου. Στο αριστερό τμήμα οι ακέραιοι αντιστοιχούν στο βήμα κατά το οποίο εμφανίζονται οι κλήσεις. Μια βέλτιστη ανάθεση συχνοτήτων παρουσιάζεται στο δεξιό μέρος.*

Όταν εκτελεστεί για την ακολουθία σ', ο άπληστος αλγόριθμος χρησιμοποιεί 17 συχνότητες ενώ μια βέλτιστη ανάθεση συχνοτήτων για τη σ' με 7 συχνότητες παρουσιάζεται στο δεξιό μέρος του σχήματος 2.1. Επομένως, ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του άπληστου αλγορίθμου είναι:

$$\rho = \max_{\sigma} \frac{C_A(\sigma)}{C_{OPT}(\sigma)} \geq \frac{C_A(\sigma')}{C_{OPT}(\sigma')} = \frac{17}{7} \approx 2.429.$$

□

Κεφάλαιο 3

Έλεγχος αποδοχής κλήσεων

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε νέα άνω και κάτω φράγματα για το πρόβλημα ελέγχου κλήσεων σε κυψελικά δίκτυα. Ειδικότερα, παρουσιάζουμε δύο νέους πιθανοτικούς αλγορίθμους για κυψελικά δίκτυα με συγκριτικό λόγο απόδοσης 2.97 και 2.914, αντίστοιχα, ενώ χρησιμοποιώντας την αρχή Minimax του Yao [28] αποδεικνύουμε δύο νέα κάτω φράγματα για επίπεδα και κυψελικά δίκτυα.

3.1 Άνω φράγματα

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε ότι, τουλάχιστο για δίκτυα που υποστηρίζουν μια συχνότητα, η χρήση τυχαιότητας δίνει on–line αλγόριθμους ελέγχου κλήσεων με συγκριτικούς λόγους απόδοσης καλύτερους από το κάτω φράγμα για τους αντίστοιχους ντετερμινιστικούς. Οι προτεινόμενοι αλγόριθμοι είναι απλοί και μπορούν εύκολα να υλοποιηθούν με μικρό κόστος (ανταλλαγή μηνυμάτων) για την επικοινωνία των σταθμών βάσης του δικτύου.

3.1.1 Ο αλγόριθμος p–RANDOM

Θεωρούμε, αρχικά, τον αλγόριθμο p–RANDOM που περιγράφεται ως εξής.

1. Αρχικά όλες οι κυψέλες είναι unmarked.
2. για κάθε καινούρια κλήση c στην κυψέλη v
3. αν η κυψέλη v είναι marked, τότε απόρριψε την κλήση c.
4. αν η κλήση c εμφανίζεται σε κάποια κυψέλη τέτοια ώστε είτε σε αυτή είτε σε γειτονική της υπάρχει κλήση που έχει γίνει δεκτή, τότε απόρριψε την κλήση c
5. διαφορετικά
6. με πιθανότητα p κάνε δεκτή την κλήση c.
7. με πιθανότητα $1-p$ απόρριψε την κλήση c και κάνε mark την κυψέλη v.

Η διαδικασία marking των κυψελών στην περίπτωση που κλήσεις που φτάνουν σε αυτές απορρίπτονται εγγυάται ότι ο αλγόριθμος p–RANDOM δεν εξομοιώνει τον άπληστο ντετερμινιστικό αλγόριθμο. Έστω ότι δε γίνεται χρήση marking των κυψελών. Θεωρούμε τότε έναν αντίπαλο ο οποίος παρουσιάζει t κλήσεις σε μια κυψέλη c και από μια κλήση στις 3 (όχι γειτονικές μεταξύ τους) κυψέλες που είναι γειτονικές με την c. Η πιθανότητα με την οποία ο πιθανοτικός αλγόριθμος δεν κάνει αποδεκτή μια κλήση στην κυψέλη c μειώνεται εκθετικά καθώς ο αριθμός t αυξάνεται (άρα το κέρδος είναι με μεγάλη πιθανότητα 1, ενώ το βέλτιστο κέρδος είναι 3).

Αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα χρησιμοποιώντας ένα απλό πιθανοτικό επιχείρημα:

Θεώρημα 3. *Για $1/3 < p < 1$, ο αλγόριθμος p–RANDOM έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ*

$$\frac{3}{(1-p)^6(3p-1)+1}$$

απέναντι σε αντιπάλους "χωρίς μνήμη".

Απόδειξη. Έστω σ μια ακολουθία κλήσεων και μια εκτέλεση του αλγορίθμου p–RANDOM πάνω στη σ. Για κάθε κλήση $c \in \sigma$, συμβολίζουμε με $X(c)$ την τυχαία μεταβλητή που δείχνει αν ο αλγόριθμος έκανε αποδεκτή την κλήση c. Προφανώς,

$$B(\sigma) = \sum_{c \in \sigma} X(c).$$

Έστω $A(\sigma)$ το σύνολο των κλήσεων της σ που γίνονται δεκτές από το βέλτιστο αλγόριθμο. Για κάθε κλήση $c \in A(\sigma)$, ορίζουμε το κατανεμημένο κέρδος (amortized benefit) $\bar{b}(c)$ ως εξής:

$$\bar{b}(c) = X(c) + \sum_{c' \in \gamma(c)} \frac{X(c')}{d(c')},$$

όπου $\gamma(c)$ είναι το σύνολο των κλήσεων της ακολουθίας σε κυψέλες γειτονικές της c, και $d(c)$ είναι ο αριθμός των κλήσεων του $A(\sigma)$ που φτάνουν σε κυψέλες γειτονικές της c. Ισχύει:

$$B(\sigma) = \sum_{c \in A(\sigma)} \bar{b}(c).$$

Έστω q η πιθανότητα καμία κλήση να μην έχει γίνει αποδεκτή στις γειτονικές κυψέλες, όταν η κλήση c παρουσιάζεται στον αλγόριθμο. Ισχύει: $\mathcal{E}[\bar{b}(c)] \geq pq + \frac{1-q}{3}$.

Σημειώνεται ότι για κάθε ακολουθία κλήσεων, ισχύει $q \geq (1-p)^6$. Επομένως, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα:

$$\mathcal{E}[\bar{b}(c)] \geq (1-p)^6 \left(p - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}.$$

Το θεώρημα προκύπτει από την ιδιότητα γραμμικότητας της μέσης τιμής (linearity of expectations). $\square$

3.1.2 Ο αλγόριθμος RANK–RANDOM

Αρχικά, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που μια κλήση c εμφανίζεται στην κυψέλη v, δεν υπάρχει λόγος να απορριφθεί η c αν έχουν παρουσιαστεί κλήσεις και στις έξι γειτονικές κυψέλες της v και ο αλγόριθμος έχει προχωρήσει την εκτέλεσή του στις γραμμές 6–7. Επεκτείνοντας αυτή την παρατήρηση, τροποποιούμε την πιθανότητα με την οποία ο αλγόριθμος αποδέχεται μια κλήση c χρησιμοποιώντας διαφορετικές πιθανότητες p_δ σύμφωνα με το αριθμό δ των γειτονικών κυψελών της v που έχουν σημειωθεί όταν εμφανίζεται η κλήση c. Με δεδομένη μια τέτοια ακολουθία κλήσεων, καλούμε *βαθμό* (*rank*) της κλήσης c (και συμβολίζουμε με $r(c)$), τον αριθμό των γειτονικών κυψελών της v που είναι σημειωμένες όταν εμφανίζεται η κλήση c.

Ορίζουμε τις πιθανότητες p_δ για $\delta = 0, 1, ..., 6$ έτσι ώστε

$$p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4 \leq p_5 \leq p_6 = 1.$$

Αυτό, διαισθητικά, αυξάνει την πιθανότητα αποδοχής μιας κλήσης καθώς αυξάνεται ο αριθμός των κλήσεων που έχουν απορριφθεί στη γειτονιά της. Επιπλέον, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε $p_0 > 1/3$, γιατί διαφορετικά ο αλγόριθμος δε μπορεί να έχει καλύτερο συγριτικό λόγο απόδοσης από 3.

Ο τροποποιημένος αλγόριθμος καλείται RANK–RANDOM και η μόνη διαφορά του από τον αλγόριθμο p–RANDOM είναι ότι, δεδομένης μιας νέας κλήσης c στη γειτονιά της οποίας δεν υπάρχουν κλήσεις που να έχουν γίνει αποδεκτές, ο αλγόριθμος υπολογίζει αρχικά το βαθμό της ($\delta = r(c)$), και κάνει δεκτή την κλήση c με πιθανότητα p_δ.

Ακολουθώντας πιο πολύπλοκκη ανάλυση από αυτή της προηγούμενης ενότητας, θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες p_δ για $\delta = 0, 1, ..., 5$ έτσι ώστε ο αλγόριθμος RANK–RANDOM να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ 2.914 απέναντι σε αντιπάλους ''χωρίς μνήμη''.

Πάλι, θεωρούμε ακολουθίες κλήσεων που περιέχουν το πολύ μια κλήση ανά κυψέλη. Για κάθε κλήση c υπάρχει ένα *σύνολο ιστορικού* (*history set*) $h(c)$ που περιέχει τους βαθμούς των γειτονικών κλήσεων της c (ταξινομημένες κατα αύξουσα σειρά). Για παράδειγμα, θεωρούμε την ακολουθία κλήσεων σ. Έστω c μια κλήση της σ με βαθμό 2, και c_1, c_2 κλήσεις γύρω από τη c που εμφανίστηκαν πριν από την c με βαθμούς 2 και 4 αντίστοιχα. Το σύνολο ιστορικού της c είναι το $h(c) = (2, 4)$.

Θεωρούμε ότι c_1 και c_2 είναι κλήσεις της σ με σύνολα ιστορικού $h(c_1) = (k_1, k_2, ..., k_{r(c_1)})$ και $h(c_2) = (l_1, l_2, ..., l_{r(c_2)})$. Λέμε ότι το ιστορικό της c_1 *υπερισχύει* του ιστορικού της κλήσης c_2 αν $r(c_1) = r(c_2)$ και $k_i \geq l_i$ για $i = 1, ..., r(c_1)$. Επίσης, λέμε ότι η κλήση c με βαθμό $r(c)$ έχει *μέγιστο σύνολο ιστορικού* $h(c)$ (*maximal history set* $h(c)$), αν για κάθε ακολουθία σ', δεν υπάρχει κλήση $c' \in \sigma'$ με βαθμό $r(c') = r(c)$ τέτοια ώστε το ιστορικό της c' να υπερισχύει αυτού της c.

Δεδομένης μιας κλήσης c με βαθμό $r(c)$ και ιστορικό $h(c) = (k_1, k_2, ..., k_{r(c)})$, ορίζουμε την ποσότητα

$$\beta(c) = \frac{1}{3} + \left(p_{r(c)} - \frac{1}{3}\right) \prod_{i=0}^{r(c)} (1 - p_{k_i}).$$

Πρόταση 4. *Αν το σύνολο ιστορικού* $h(c_1)$ *υπερισχύει του* $h(c_2)$, *ισχύει ότι* $\beta(c_1) \leq \beta(c_2)$.

Απόδειξη. Αφού το $h(c_1) = (k_1, ..., k_{r(c_1)})$ υπερισχύει του $h(c_2) = (l_1, ..., l_{r(c_2)})$ είναι $r(c_1) = r(c_2)$ και $k_i \geq l_i$ για $i = 1, ..., r(c_1)$. Σημειώνουμε ότι αν $k_i \geq l_i$, τότε $p_{k_i} \geq p_{l_i}$ για $i = 1, ..., r(c_1)$. Επειδή $p_{r(c_1)} = p_{r(c_2)} > 1/3$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\beta(c_1) &= \frac{1}{3} + \left(p_{r(c_1)} - \frac{1}{3}\right) \prod_{i=0}^{r(c_1)} (1 - p_{k_i}) \\
&\leq \frac{1}{3} + \left(p_{r(c_2)} - \frac{1}{3}\right) \prod_{i=0}^{r(c_2)} (1 - p_{l_i}) \\
&= \beta(c_2)
\end{aligned}$$

□

Τώρα θεωρούμε την εκτέλεση του αλγορίθμου Rank–Random για την ακολουθία κλήσεων σ. Χρησιμοποιώντας τους ίδιους συμβολισμούς με την απόδειξη του θεωρήματος 3, καταλήγουμε στο ότι η μέση τιμή του κατανεμημένου κέρδους από κάθε κλήση $c \in A(\sigma)$ που θα γινόταν αποδεκτή από το βέλτιστο offline αλγόριθμο είναι

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[\bar{b}(c)] &\geq p_{r(c)} q(c) + \frac{1 - q(c)}{3} \\
&= \frac{1}{3} + \left(p_{r(c)} - \frac{1}{3}\right) q(c)
\end{aligned}$$

όπου $q(c)$ είναι η πιθανότητα καμία κλήση να μην έχει γίνει δεκτή στις γειτονικές κυψέλες, όταν η κλήση c εμφανίζεται στον αλγόριθμο. Δεδομένης μιας κλήσης c με βαθμό $r(c)$ και ιστορικό $h(c) = (k_1, ..., k_{r(c)})$, είναι

$$q(c) \geq \prod_{i=1}^{r(c)} (1 - p_{k_i})$$

Αφού $p_{r(c)} \geq p_0 > 1/3$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[\bar{b}(c)] &\geq \frac{1}{3} + \left(p_{r(c)} - \frac{1}{3}\right) q(c) \\
&= \frac{1}{3} + \left(p_{r(c)} - \frac{1}{3}\right) \prod_{i=1}^{r(c)} (1 - p_{k_i}) \\
&= \beta(c)
\end{aligned}$$

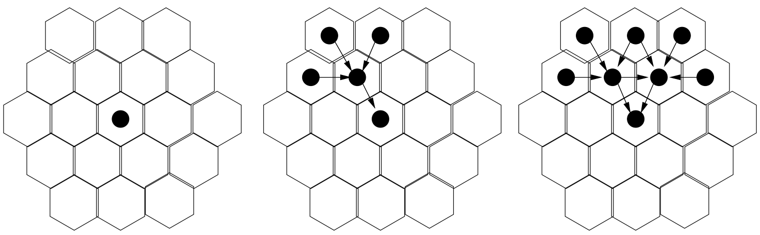
Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα κάτω φράγμα για τη μέση τιμή του κατανεμημένου κέρδους από κάθε κλήση $c \in A(\sigma)$ που θα γινόταν αποδεκτή από το βέλτιστο αλγόριθμο υπολογίζοντας την ελάχιστη τιμή της ποσότητας $\beta(c)$ μεταξύ όλων των πιθανών βαθμών και ιστορικών της

c. Με βάση την πρόταση 4, για κάθε πιθανό βαθμό της c μεταξύ 0 και 6 λαμβάνουμε υπόψη μας μόνο τα μέγιστα ιστορικά.

Προφανώς, αν μια κλήση έχει βαθμό 0, τότε το σύνολο ιστορικού της είναι το $\emptyset$ και είναι μέγιστο. Έστω c μια κλήση με βαθμό $r(c) > 0$ και ιστορικό σύνολο $h(c) = (k_1, ..., k_{r(c)})$. Ασχολούμαστε με κλήσεις που εμφανίστηκαν πριν από την c, και για κάθε ζεύγος τέτοιων κλήσεων c_1, c_2 σε αμοιβαία γειτονικές κυψέλες, κατασκευάζουμε ένα βέλος που δείχνει από την κλήση που εμφανίστηκε νωρίτερα προς την κλήση που εμφανίστηκε τελευταία. Ο βαθμός κάθε κλήσης είναι ο αριθμός των βελών που δείχνουν προς αυτή. Θεωρούμε τις $r(c)$ κλήσεις σε γειτονικές κυψέλες της κυψέλης στην οποία εμφανίστηκε η c που εμφανίστηκαν πριν από την c. Παρατηρούμε ότι τουλάχιστο μια από αυτές τις κλήσεις έχει βαθμό το πολύ 3, δηλαδή $k_1 \leq 3$. Επίσης, παρατηρούμε ότι το πολύ τρία βέλη από κλήσεις σε μη γειτονικές κυψέλες της c μπορούν να δείχνουν προς κάθε κλήση c' σε κυψέλη γειτονική της κυψέλης της c. Επιπλέον, ο συνολικός αριθμός βελών μεταξύ κλήσεων σε κυψέλες γειτονικές της c είναι το πολύ $r(c) - 1$ αν $1 \leq r(c) \leq 5$, και 6 αν $r(c) = 6$. Κατά συνέπεια, δεδομένου του βαθμού $r(c) > 0$ της c, το κριτήριο που χρησιμοποιούμε για την ανεύρεση όλων των μέγιστων συνόλων ιστορικού είναι το:

$$\begin{aligned} k_1 &= 3 \\ \sum_{i=1}^{r(c)} k_i &= \begin{cases} 4r(c) - 1 & \text{αν } 1 \leq r(c) \leq 5 \\ 24 & \text{αν } r(c) = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Παραδείγματα όλων των πιθανών βαθμών και συνόλων ιστορικού που μπορεί να έχει μια κλήση παρουσιάζονται στο σχήμα 3.1–3.5.

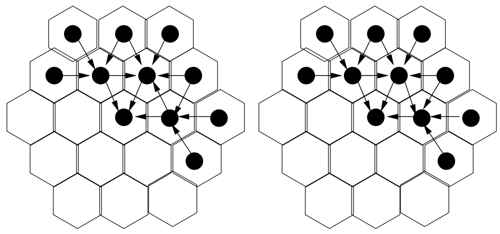


Σχήμα 3.1: Οι κλήσεις (στην κεντρική κυψέλη) με βαθμό 0, 1, και 2 και μέγιστα σύνολα ιστορικού $\emptyset$, (3), και $(3, 4)$, αντίστοιχα.

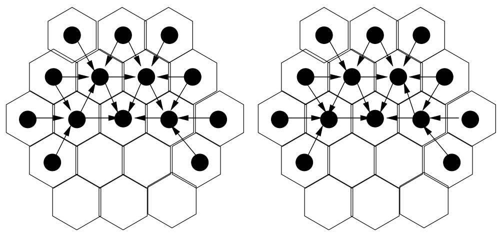
Στον πίνακα 3.1 φαίνεται η τιμή της ποσότητας $\beta(c)$ για κάθε δυνατό συνδυασμό βαθμών και μέγιστων συνόλων ιστορικού της c όταν οι πιθανότητες έχουν τις τιμές $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 0.390045$, $p_4 = 0.45$, $p_5 = 0.532$, και $p_6 = 1$. Βρίσκουμε ότι η ελάχιστη τιμή του $\beta(c)$ για όλους τους δυνατούς βαθμούς και σύνολα ιστορικού της c είναι 0.343208.

Με βάση τη γραμμικότητα της μέσης τιμής, συμπεραίνουμε ότι το κέρδος $B(\sigma)$ του αλγορίθμου Rank–Random για κάθε ακολουθία κλήσεων σ είναι

$$B(\sigma) \geq 0.343208 B_{OPT}(\sigma),$$



Σχήμα 3.2: Κλήσεις με βαθμό 3 και μέγιστα σύνολα ιστορικού (3,3,5) και (3,4,4).



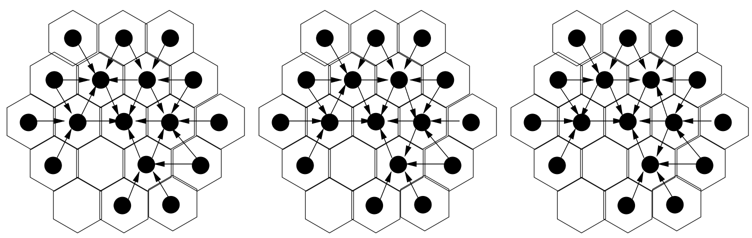
Σχήμα 3.3: Κλήσεις με βαθμό 4 και μέγιστα σύνολα ιστορικού (3,4,4,4) και (3,3,4,5).

όπου $B_{OPT}(\sigma)$ το κέρδος του βέλτιστου αλγόριθμου. Αυτό συνεπάγεται ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγορίθμου Rank–Random απέναντι σε αλγορίθμους ''χωρίς μνήμη'' είναι το πολύ $(0.343208)^{-1} \approx 2.914$. Επομένως, έχουμε αποδείξει το ακόλουθο θεώρημα.

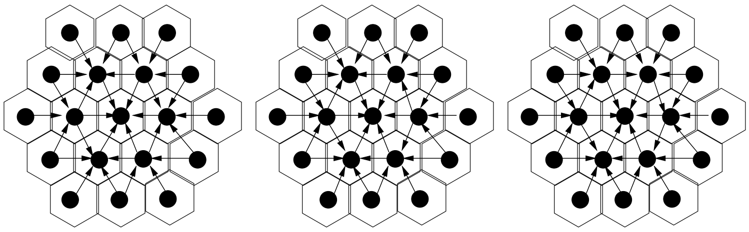
Θεώρημα 5. *Υπάρχει πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου κλήσεων για κυψελικά δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα, με συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ 2.914 απέναντι σε αντιπάλους ''χωρίς μνήμη''.*

3.1.3 Γενίκευση σε αυθαίρετα δίκτυα

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια επέκταση της ανάλυσης του αλγορίθμου p–random για αυθαίρετα δίκτυα. Το αποτέλεσμα δίνεται σε σχέση με το με μέγιστο βαθμό Δ του δικτύου. Οι Pantziou et al. [21] μελετούν την απόδοση του $\frac{1}{\Delta}$–random αλγορίθμου στη μέση περίπτωση, και αποδεικνύουν ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσής του για ακολουθίες κλήσεων που παράγονται με



Σχήμα 3.4: Κλήσεις με βαθμό 5 και μέγιστα σύνολα ιστορικού (3,3,3,5,5), (3,4,4,4,4), και (3,3,4,4,5).



Σχήμα 3.5: Κλήσεις με βαθμό 6 και μέγιστα σύνολα ιστορικού $(3,3,3,5,5,5)$, $(3,3,4,4,5,5)$, και $(3,4,4,4,4,5)$.

Βαθμός	Σύνολο Ιστορικού	$\beta(c)$
0	$\emptyset$	0.390045
1	(3)	0.367925
2	(3,4)	0.352359
3	(3,3,5)	0.343208
3	(3,4,4)	0.343797
4	(3,4,4,4)	0.345173
4	(3,3,4,5)	0.344506
5	(3,3,3,5,5)	0.343208
5	(3,4,4,4,4)	0.344422
5	(3,3,4,4,5)	0.343797
6	(3,3,3,5,5,5)	0.348841
6	(3,3,4,4,5,5)	0.349767
6	(3,4,4,4,4,5)	0.350748

Πίνακας 3.1: Κάτω φράγματα για το μέσο κατανεμημένο κέρδος για κάθε βέλτιστη κλήση.

βάση συγκεκριμένες πιθανοτικές κατανομές είναι κατά πολύ μικρότερος από το μέσο βαθμό του δικτύου.

Θεώρημα 6. *Για κάθε δίκτυο με μέγιστο βαθμό $\Delta \geq 2$, υπάρχει ένας πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου κλήσεων με συγκριτικό λόγο απόδοσης $27\Delta/28$ απέναντι σε αντιπάλους "χωρίς μνήμη".*

Απόδειξη. Έστω G ένα δίκτυο με μέγιστο βαθμό Δ. Θεωρούμε την εκτέλεση του αλγορίθμου p–random για μια ακολουθία κλήσεων σ στο δίκτυο G. Σύμφωνα με το θεώρημα 3, η μέση τιμή του βελτιωμένου κέρδους για κάθε κλήση c που γίνεται αποδεκτή από το βέλτιστο αλγόριθμο είναι:

$$\mathcal{E}[\bar{b}(c)] \geq (1-p)^{\Delta}\left(p - \frac{1}{\Delta}\right) + \frac{1}{\Delta}.$$

Το δεξιό μέρος της έκφρασης μεγιστοποιείται για $p = \frac{2}{\Delta+1}$. Προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} E[\bar{b}(c)] &\geq \left(1-\frac{2}{\Delta+1}\right)^{\Delta}\left(\frac{2}{\Delta+1}-\frac{1}{\Delta}\right)+\frac{1}{\Delta} \\ &= \frac{1}{\Delta}\left(\left(1-\frac{2}{\Delta+1}\right)^{\Delta+1}+1\right) \\ &\geq \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{27}+1\right) \\ &= \frac{28}{27\Delta} \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι [1], για το κέρδος του αλγορίθμου $\frac{2}{\Delta+1}$–RANDOM, ισχύει

$$B_{OPT}(\sigma) \leq \frac{27\Delta}{28}\mathcal{E}[B(\sigma)].$$

□

Σημειώνουμε ότι με χρησιμοποίηση του θεωρήματος των Awerbuch et al. [1], 6 συνεπάγεται η ύπαρξη ενός πιθανοτικού αλγορίθμου ελέγχου κλήσεων για αυθαίρετα μεγάλο αριθμό συχνοτήτων με συγκριτικό λόγο απόδοσης $0.96\Delta + 1$.

Θεωρούμε ένα δίκτυο G και έστω $\Gamma(G)$ το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο στη γειτονιά κάθε κόμβου. Τότε το $\Gamma(G)$ αποτελεί ένα κάτω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης κάθε ντετερμινιστικού αλγορίθμου [4]. Εισάγοντας τον παράγοντα $\Gamma(G)$ στην απόδειξη του θεωρήματος 6, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα:

Συμπέρασμα 7. *Για κάθε δίκτυο που υποστηρίζει μια συχνότητα με $\Gamma(G) \geq 2$ και $1/2 < p < 1$, ο αλγόριθμος p–RANDOM έχει (αυστηρά) καλύτερο συγκριτικό λόγο απόδοσης από κάθε ντετερμινιστικό αλγόριθμο.*

Προφανώς, για $\Gamma(G) = 1$ ή για $\Gamma(G) = 0$, ο άπληστος αλγόριθμος είναι βέλτιστος.

3.2 Κάτω φράγματα

Χρησιμοποιώντας την Αρχή Minimax που προτάθηκε από τον Yao [28] (βλέπε επίσης [18]), αποδεικνύουμε δύο κάτω φράγματα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης πιθανοτικών αλγορίθμων για κυψελικά δίκτυα και για αυθαίρετα, επίπεδα δίκτυα, απέναντι σε αντιπάλους ''χωρίς μνήμη''.

[1]Παρατηρούμε ότι από τις ανισότητες για το $E[\bar{b}(c)]$ συνεπάγεται ότι

$$\lim_{\Delta\to\infty} \Delta E[\bar{b}(c)] \geq 1 + e^{-2}.$$

Κατά συνέπεια, για γράφους με με επαρκώς μεγάλο μέγιστο βαθμό Δ, ο αλγόριθμος $\frac{2}{\Delta+1}$–Random πετυχαίνει συγκριτκό λόγο απόδοσης το πολύ $(0.8808 + \epsilon)\Delta$ για κάποιο μικρό $\epsilon > 0$.

Θεωρούμε δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα. Τα κάτω φράγματα ισχύουν και για δίκτυα που υποστηρίζουν πολλές συχνότητες.

Στις αποδείξεις που ακολουθούν χρησιμοποιούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 8 (Αρχή Minimax του Yao (Yao's Minimax Principle) [18]). *Δεδομένης μιας πιθανοτικής κατανομής $\mathcal{P}$ για μια ακολουθία κλήσεων σ, συμβολίζουμε με $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_A(\sigma)]$ και $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_{OPT}(\sigma)]$ το μέσο κέρδος ενός ντετερμινιστικού αλγορίθμου A και του βέλτιστου off–line αλγορίθμου, αντίστοιχα, που εκτελούνται για ακολουθίες κλήσεων που δημιουργούνται σύμφωνα με την $\mathcal{P}$. Ορίζουμε την απόδοση του A με βάση την $\mathcal{P}$, $c_A^{\mathcal{P}}$ να είναι τέτοια έτσι ώστε*

$$c_A^{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_{OPT}(\sigma)]}{\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_A(\sigma)]}.$$

Έστω A_R ένας πιθανοτικός αλγόριθμος. Τότε, η απόδοση του A με βάση την $\mathcal{P}$ αποτελεί ένα κάτω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης του A_R απέναντι σε αντιπάλους "χωρίς μνήμη", δηλαδή

$$c_A^{\mathcal{P}} \leq c_{A_R}.$$

3.2.1 Κάτω φράγμα για κυψελικά δίκτυα

Το κάτω φράγμα που παρουσιάζουμε για αλγορίθμους ελέγχου κλήσεων σε κυψελικά δίκτυα είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 9. *Κανένας πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου κλήσεων σε κυψελικά δίκτυα δεν έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από 1.857 απέναντι σε αντιπάλους "χωρίς μνήμη".*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν κατάλληλο χρωματισμό των κυψελών του δικτύου με χρώματα ΚΟΚΚΙΝΟ, ΜΠΛΕ, και ΠΡΑΣΙΝΟ. Έστω r_0 μια κόκκινη κυψέλη, b_1, b_2, και b_3 οι μπλε γειτονικές της, και g_1, g_2, και g_3 οι πράσινες γειτονικές της. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει αντίπαλος $\mathcal{ADV}$ που δημιουργεί κλήσεις σύμφωνα με μια πιθανοτική κατανομή $\mathcal{P}$ κατά τέτοιον τρόπο ώστε κανένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος να μη μπορεί να είναι καλύτερος από 1.857–ανταγωνιστικός με βάση την $\mathcal{P}$ ακόμα και στην περίπτωση που γνωρίζει εκ των προτέρων την πιθανοτική κατανομή $\mathcal{P}$.

Ορίζουμε την πιθανοτική κατανομή $\mathcal{P}$ ως εξής. Αρχικά, ο αντίπαλος δημιουργεί μια κλήση σε μια κόκκινη κυψέλη r_0. Στη συνέχεια,

- είτε σταματά, με πιθανότητα $4/7$,
- είτε κάνει τα ακόλουθα με πιθανότητα $3/7$. Παρουσιάζει δύο κλήσεις στις κυψέλες b_1 και b_2, και
  - είτε δημιουργεί μια κλήση στην κυψέλη b_3 με πιθανότητα $1/3$,
  - είτε παράγει τρεις κλήσεις στις κυψέλες g_1, g_2, και g_3, με πιθανότητα $2/3$.

Εύκολα φαίνεται ότι το αναμενόμενο κέρδος από τον βέλτιστο off–line αλγόριθμο για ακολουθίες κλήσεων που παράγονται σύμφωνα με την $\mathcal{P}$ είναι

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_{OPT}(\sigma)] = 1 \cdot \frac{4}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{13}{7}.$$

Έστω A ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος ελέγχου κλήσεων που τρέχει για κλήσεις που παράγονται από τον αντίπαλο $\mathcal{ADV}$. Θεωρούμε t εκτελέσεις του αλγορίθμου σε t ακολουθίες κλήσεων που παράγονται σύμφωνα με την πιθανοτική κατανομή $\mathcal{P}$. Έστω, επίσης, q_0 ο αριθμός των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο A κάνει αποδεκτή μια κλήση που παράγεται στην κυψέλη r_0, και έστω q_1 ο αριθμός των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο A κάνει αποδεκτές τις κλήσεις που παρουσιάζονται στις κυψέλες b_1 και b_2.

Ο μέσος αριθμός εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος δεν κάνει δεκτή μια κλήση σε μια κυψέλη r_0 και ο αντίπαλος παράγει μια κλήση στην κυψέλη b_3 είναι $\frac{3}{7}\frac{1}{3}(t-q_0)$. Όμοια, ο μέσος αριθμός εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος δεν κάνει αποδεκτές τις κλήσεις στις κυψέλες r_0, b_1, και b_2 ενώ ο αντίπαλος παράγει κλήσεις στις κυψέλες g_1, g_2, g_3 είναι $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{7}(t-q_0)-q_1\right)$.

Επομένως,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_A(\sigma)] \leq \frac{q_0 + 2q_1 + \frac{3}{7}\frac{1}{3}(t-q_0) + 3\frac{2}{3}\left(\frac{3}{7}(t-q_0)-q_1\right)}{t} = 1,$$

και

$$c_A^{\mathcal{P}} \geq \frac{13}{7} = 1.857.$$

Από το λήμμα 8, αποδεικνύεται ότι αυτό αποτελεί ένα κάτω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης κάθε πιθανοτικού αλγορίθμου απέναντι σε αντιπάλους ‘‘χωρίς μνήμη’’. □

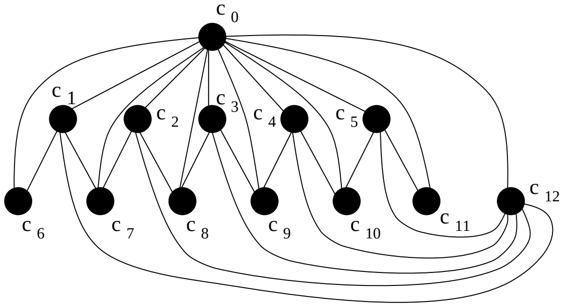
3.2.2 Κάτω φράγμα για επίπεδα δίκτυα

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα κάτω φράγμα για επίπεδα δίκτυα. Σημειώνεται ότι το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα είναι το 5 και επιτυγχάνεται από τον αλγόριθμο ‘‘ταξινόμησε και επίλεξε τυχαία’’ (‘‘classify and randomly select’’)[1, 21].

Θεώρημα 10. *Υπάρχει ένα επίπεδο δίκτυο για το οποίο κανένας πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου κλήσεων δεν έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από 2.086 απέναντι σε αντιπάλους ‘‘χωρίς μνήμη’’.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα επίπεδο δίκτυο με γράφο παρεμβολής που παρουσιάζεται στο σχήμα 3.6. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει αντίπαλος $\mathcal{ADV}$ που παράγει κλήσεις σύμφωνα με μια πιθανοτική κατανομή $\mathcal{P}$ με τέτοιον τρόπο ώστε κανένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος να μη μπορεί να είναι καλύτερος από 2.086–ανταγωνιστικός με βάση την $\mathcal{P}$ ακόμα κι αν γνωρίζει εκ των προτέρων την πιθανοτική κατανομή $\mathcal{P}$.

Ορίζουμε την πιθανοτική κατανομή $\mathcal{P}$ ως εξής. Κατ' αρχήν, ο αντίπαλος παράγει μια κλήση στην κυψέλη c_0. Στη συνέχεια,



Σχήμα 3.6: *Ο επίπεδος γράφος παρεμβολής που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του θεωρήματος .*

- είτε σταματά με πιθανότητα 4/5,
- ή κάνει τα ακόλουθα με πιθανότητα 1/5. Παρουσιάζει μια κλήση στις κυψέλες $c_1, ..., c_5$, και μετά
  - είτε σταματά με πιθανότητα 2/7,
  - είτε παρουσιάζει μια κλήση στις κυψέλες $c_6, ..., c_{12}$, με πιθανότητα 5/7.

Το μέσο κέρδος από το βέλτιστο off–line αλγόριθμο για ακολουθίες κλήσεων που παράγονται σύμφωνα με την $\mathcal{P}$ είναι:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_{OPT}(\sigma)] = 1 \cdot \frac{4}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} + 7 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{73}{35}.$$

Έστω A ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος ελέγχου κλήσεων που εκτελείται για κλήσεις που παράγονται από τον αντίπαλο $\mathcal{ADV}$. Θεωρούμε t εκτελέσεις του αλγορίθμου για t ακολουθίες κλήσεων που παράγονται σύμφωνα με την πιθανοτική κατανομή $\mathcal{P}$. Έστω τώρα q_0 ο αριθμός των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο A αποδέχεται τις κλήσεις που παράγονται στην κυψέλη c_0, και έστω q_1 ο αριθμός των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο A αποδέχεται και τις κλήσεις στην κυψέλη c_1 και αυτές στην κυψέλη c_2.

Ο μέσος αριθμός εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος δεν αποδέχεται κλήσεις στην κυψέλη c_0 και ο αντίπαλος παράγει κλήσεις στις κυψέλες $c_1, ..., c_5$ είναι $\frac{1}{5}(t - q_0)$. Όμοια, ο μέσος αριθμός εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος δεν αποδέχεται κλήσεις στις κυψέλες $c_0, c_1, ..., c_5$ και ο αντίπαλος παράγει κλήσεις στις κυψέλες $c_6, ..., c_{12}$ είναι: $\frac{5}{7}\left(\frac{1}{5}(t - q_0) - q_1\right)$. Επομένως,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_A(\sigma)] \leq \frac{q_0 + 5q_1 + 7\frac{5}{7}\left(\frac{1}{5}(t - q_0) - q_1\right)}{t} = 1,$$

και

$$c_A^{\mathcal{P}} \geq \frac{73}{35} = 2.086.$$

Από το λήμμα 8, συμπεραίνουμε ότι αυτό αποτελεί ένα κάτω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης κάθε πιθανοτικού αλγορίθμου απέναντι σε κάθε αντίπαλο ``χωρίς μνήμη''. □

Κεφάλαιο 4

Ανοιχτά προβλήματα

Η εργασία μας αφήνει ενδιαφέροντα ανοιχτά ζητήματα, τόσο για το πρόβλημα ανάθεσης συχνοτήτων όσο και για το πρόβλημα ελέγχου κλήσεων.

Για το πρόβλημα ανάθεσης συχνοτήτων, το πιο ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν υπάρχει ντετερμινιστικός αλγόριθμος με συγκριτικό λόγο απόδοσης 2. Επιπλέον, η χρήση τυχαιότητας μπορεί να οδηγήσει σε ακόμα καλύτερα αποτελέσματα. Με βάση όσα γνωρίζουμε πιθανοτικοί αλγόριθμοι ανάθεσης συχνοτήτων δεν έχουν εξεταστεί ούτε στη στατική ούτε στην on–line εκδοχή του προβλήματος.

Σχετικά με το πρόβλημα ελέγχου κλήσεων, ένα ενδιαφέρον ανοιχτό πρόβλημα είναι η ελαχιστοποίηση του χάσματος μεταξύ των κάτω και άνω φραγμάτων. Εξαιτίας του κάτω φράγματος για ντετερμινιστικούς αλγορίθμους, η μελέτη πιθανοτικών αλγορίθμων θεωρείται αναγκαία. Η μέθοδος "Classify and Randomly Select" δεν είναι ικανοποιητική όχι μόνο γιατί πιστεύουμε ότι η απόδοση της είναι αρκετά μακρυά από το βέλτιστο αλλά και για τον ακόλουθο λόγο. Αν θεωρήσουμε ένα δίκτυο που υποστηρίζει μια συχνότητα, έναν "Classify and Randomly Select" αλγόριθμο A, και μια ακολουθία κλήσεων σ τέτοια ώστε οι κλήσεις να εμφανίζονται σε διακριτές κυψέλες που να ανήκουν στην ίδια κλάση χρώματος. Προφανώς, ο βέλτιστος αλγόριθμος θα δεχόταν όλες τις κλήσεις τις ακολουθίας σ, ενώ με πιθανότητα $2/3$, ο αλγόριθμος A δεν εμφανίζει κανένα κέρδος. Πιστεύουμε ότι η μελέτη στο πρόβλημα θα πρέπει να προσανατολιστεί στους αλγορίθμους ελέγχου κλήσεων των οποίων το κέρδος παρουσιάζει μεγάλη συγκέντρωση γύρω από τη μέση τιμή του. Παραπλήσια αποτελέσματα έχουν παρουσιαστεί στα πλαίσια της μελέτης οπτικών δικτύων [17].

Τέλος, αν και η υπόθεση κλήσεων με άπειρη διάρκεια απεικονίζει το σενάριο σύμφωνα με το οποίο οι κλήσεις χρησιμοποιούν το δίκτυο για περίπου ίδιο χρονικό διάστημα, στην πράξη αυτό δεν ισχύει. Η επέκταση του μοντέλου μας κατά τρόπο ώστε η διάρκεια των κλήσεων να αποτελεί παράμετρο και ο σχεδιασμός αλγορίθμων σε αυτό το πλαίσιο είναι μια άλλη ενδιαφέρουσα πρόκληση.

Βιβλιογραφία

[1] B. Awerbuch, Y. Azar, A. Fiat, S. Leonardi, and A. Rosen. Competitive On–line Call Admission in Optical Networks. In *Proceedings of the 4th Annual European Symposium on Algorithms (ESA '96)*, LNCS 1136, Springer, pp. 431–444, 1996.

[2] B. Awerbuch, Y. Bartal, A. Fiat and A. Rosen. Competitive Non–Preemptive Call Control. In *Proceedings of the 5th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '94)*, pp. 312–320, 1994.

[3] Y. Bartal, A. Fiat, and S. Leonardi. Lower Bounds for On–line Graph Problems with Applications to On–line Circuit and Optical Routing. In *Proc. of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '96)*, pp. 531–540, 1996.

[4] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, and E. Papaioannou. On–line Call Control in Cellular Networks. *Foundations of Mobile Computing* (satellite workshop of FST&TCS '99), 1999. Also, CTI Technical Report 99-10-02.

[5] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, and E. Papaioannou. Efficient On-line Communication in Cellular Networks. In Proceedings of the 12th Annual ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures (SPAA 2000), pp. 46-53, July 2000.

[6] D. Dimitrijevic and J. Vucetic. Design and Performance Analysis of Algorithms for Channel Allocation in Cellular Networks. In *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 42(4), pp. 526–534, 1993.

[7] F. Harary. *Graph Theory.* Addison-Wesley, 1969.

[8] W.K. Hale. Frequency Assignment: Theory and Applications. In *Proceedings of the IEEE*, 68(12), pp. 1497–1514, 1980.

[9] S. Irani. Coloring inductive graphs online. In *Proceedings of 31st Annual IEEE Computer Society Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 90)*, 1990.

[10] J. Janssen and K. Kilakos. Optimal Multicoloring Algorithms with Limited Recoloring. *Submitted for publication*, April 1995.

[11] J. Janssen, K. Kilakos, and O. Marcotte.Fixed Preference Frequency Allocation for Cellular Telephone Systems. In *Proceedings of 15th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS '98)*, LNCS 1373, Springer, pp. 3–13, 1998.

[12] J. Janssen, D. Krizanc, L. Narayanan, and S. Shende. Distributed On–Line Frequency Assignment in Cellular Networks. In *Proceedings of 15th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS '98)*, LNCS 1373, Springer, pp. 3–13, 1998.

[13] T. Kahwa and N. Georganas. A hybrid channel assignment scheme in large–scale cellular–structured mobile communication systems. *IEEE Transactions on Communications*, 4:432-438, 1978.

[14] S. Kim and S. L. Kim. A two–phase algorithm for frequency assignment in cellular mobile systems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 1994

[15] S. Khanna and K. Kumaran. On wireless spectrum etsimation and generalized graph coloring. In *Proc. of the 17th Joined Conference of IEEE Computer and Communication Societies (INFOCOM 98)*, 1998.

[16] L. Lovasz, M. Saks, and W. Trotter. An online graph coloring algorithm with sub–linear performance ratio. *Discrete Math*, 1989.

[17] S. Leonardi, A. Marchetti–Spaccamela, A. Prescuitti, and A. Rosen. On–line Randomized Call–Control Revisited. In *Proccedings of the 9th Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '98)*, pp. 323–332, 1998.

[18] R. Motwani and B. Raghavan. Randomized Algorithms. *Cambridge University Press*, 1995.

[19] C. McDiarmid and B. Reed. Channel Assignment and Weighted Coloring. Manuscript, 1997.

[20] L. Narayanan and S. Shende. Static Frequency Assignment in Cellular Networks. In *Proceedings of the 5th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO '97)*, pp. 215–227, 1997.

[21] G. Pantziou, G. Pentaris, and P. Spirakis. Competitive Call Control in Mobile Networks. In *Proceedings of International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC '97)*, LNCS 1350, Springer, pp. 404–413, 1997.

[22] P. Raymond. Performance Analysis of cellular networks. *IEEE Transactions on Communications*, 39(12): 1787-1793, 1991.

[23] K. R. and V. Ramachandran. *Parallel Algorithms for Shared Memory Machines*, chapter 17, pages 871-942. MIT Press, 1990.

[24] D. Sleator and R.E. Tarjan. Amortized Efficiency of List Update and Paging Rules. *Communications of Association of Computing Machinery* 28, pp. 202–208, 1985.

[25] S. Vishwanathan. Randomized On–line Graph Coloring. *Journal of Algorithms*, 1992.

[26] P.–J. Wan and L. Liu. Maximal Throughput in Wavelength–Routed Optical Networks. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, AMS, Vol. 46, pp. 15–26, 1998.

[27] W. Wang and C. Rushforth. An adaptive local–search algorithm for the channel– asignment problem. Technical Report, August 1995.

[28] A. C. Yao. Probabilistic Computations: Towards a Unified Measure of Complexity. In *Proceedings of the 17th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS '77)*,pp. 222–227, 1977.