

---

---

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών  
και Πληροφορικής

Εύρεση Ανεξάρτητων Συνόλων και  
Χρωματισμοί σε Γραφήματα με Εφαρμογή  
στην Αποδοτική Ανάθεση Συχνοτήτων σε  
Ασύρματα Δίκτυα

Διδακτορική Διατριβή

ΕΤΑΓΓΕΛΙΑ ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΚΛΑΜΑΝΗΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Πάτρα, Νοέμβριος 2004

---

---



Εύρεση Ανεξάρτητων Συνόλων και  
Χρωματισμοί σε Γραφήματα με Εφαρμογή  
στην Αποδοτική Ανάθεση Συχνοτήτων σε  
Ασύρματα Δίκτυα

Διδακτορική Διατριβή

ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή:

Χρήστος Κακλαμάνης, Καθηγητής (Επιβλέπων)  
Ελευθέριος Κυρούσης, Καθηγητής  
Πάυλος Σπυράκης, Καθηγητής  
Αθανάσιος Τσακαλίδης, Καθηγητής  
Σταύρος Κοσμάδακης, Καθηγητής  
Χρήστος Ζαρολιάγκης, Αναπλ. Καθηγητής  
Σωτήρης Νικολετσέας, Λέκτορας



# Εύρεση Ανεξάρτητων Συνόλων και Χρωματισμοί σε Γραφήματα με Εφαρμογή στην Αποδοτική Ανάθεση Συχνοτήτων σε Ασύρματα Δίκτυα

ΕΤΑΓΓΕΛΙΑ ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ

## Περίληψη

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή, ασχολούμαστε με ζητήματα που ανακύπτουν σε ασύρματα δίκτυα επικοινωνίας που χρησιμοποιούν την τεχνική πολύπλεξης διαμοιρασμού συχνότητας (Frequency Division Multiplexing - FDM). Μελετάμε δίκτυα που βασίζονται σε τηλεπικοινωνιακή υποδομή όπως τα κυψελικά δίκτυα κινητής τηλεφωνίας καθώς και δίκτυα αυτόνομων ασύρματων εκπομπών όπως τα ασύρματα δίκτυα τύπου ad hoc. Μοντελοποιούμε τα δίκτυα με ειδικά γραφήματα και τα αντίστοιχα προβλήματα επικοινωνίας σαν προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης στα γραφήματα αυτά. Τα αποτελέσματά μας περιλαμβάνουν νέους on-line αλγόριθμους που βελτιώνουν τους προηγούμενους γνωστούς αλγόριθμους ως προς την απόδοση και νέα κάτω φράγματα.

Τα κυψελικά δίκτυα χωρίζουν νοητά μια γεωγραφική περιοχή σε υποπεριοχές που καλούνται κυψέλες. Κάθε κυψέλη αποτελεί την περιοχή εμβέλειας ενός σταθμού βάσης με δυνατότητες ασύρματης επικοινωνίας. Κάθε σταθμός βάσης είναι υπεύθυνος για την εξυπηρέτηση των χρηστών που βρίσκονται στην περιοχή εμβέλειάς του. Για να επικοινωνήσουν δύο χρήστες του κυψελικού δικτύου θα πρέπει, καταρχήν, να εγκατασταθεί ασύρματη επικοινωνία των χρηστών με τους σταθμούς βάσης που εξυπηρετούν τις κυψέλες στις οποίες ανήκουν οι χρήστες και στη συνέχεια να επικοινωνήσουν μεταξύ τους οι σταθμοί βάσης. Ασύρματη επικοινωνία με το σταθμό βάσης απαιτείται ακόμα και στην περίπτωση που οι δυο χρήστες ανήκουν στην ίδια κυψέλη ή ο ένας χρήστης είναι χρήστης του κυψελικού δικτύου και ο άλλος χρησιμοποιεί, για παράδειγμα, ένα δίκτυο σταθερής τηλεφωνίας. Η τεχνολογία FDM χρησιμοποιείται για την ταυτόχρονη ασύρματη επικοινωνία δυο κοντινών χρηστών με τους σταθμούς βάσης τους. Η τεχνολογία αυτή έχει τη δυνατότητα να υλοποιεί την επικοινωνία κάθε χρήστη με τον σταθμό βάσης του σε μια συγκεκριμένη συχνότητα. Συνήθως, η χρήση της ίδιας συχνότητας από χρήστες που ανήκουν στην ίδια ή σε γειτονικές κυψέλες προκαλεί παρεμβολές σήματος που καθιστούν αδύνατη

την επικοινωνία. Το βασικότερο μοντέλο κυψελικών δικτύων υποθέτει ότι οι σταθμοί βάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο επίπεδο και έχουν την ίδια εμβέλεια. Έτσι, το επίπεδο χωρίζεται σε κυψέλες με σχήμα κανονικού εξαγώνου. Στην πράξη, οι κυψέλες μπορούν να έχουν ιδιαίτερα ακανόνιστο σχήμα ενώ ενδέχεται να υπάρχουν και πιο πολύπλοκοι περιορισμοί σχετικά με την ασφαλή χρήση της ίδιας συχνότητας από διαφορετικούς χρήστες. Τέτοιοι περιορισμοί μοντελοποιούνται από γραφήματα παρεμβολών των οποίων οι κόμβοι αντιστοιχούν σε κυψέλες του δικτύου και μια ακμή μεταξύ δυο κόμβων δηλώνει ότι δημιουργούνται παρεμβολές σήματος όταν η ίδια συχνότητα ανατίθεται σε χρήστες που βρίσκονται στις κυψέλες που αντιστοιχούν στους κόμβους αυτούς.

Για την επίτευξη επικοινωνίας σε ένα κυψελικό δίκτυο, ένα σημαντικό πρόβλημα που πρέπει να λυθεί είναι η ανάθεση συχνοτήτων στους χρήστες ώστε να επικοινωνούν με τους σταθμούς βάσης τους χωρίς παρεμβολές σήματος. Καθώς το φάσμα των διαθέσιμων συχνοτήτων είναι περιορισμένο, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να χρησιμοποιείται αποδοτικά. Τα προβλήματα της ανάθεσης συχνοτήτων (frequency allocation) και ελέγχου αποδοχής κλήσεων (call control) αποτελούν τα πιο θεμελιώδη προβλήματα που πρέπει να λυθούν για την αποδοτική χρήση του φάσματος συχνοτήτων. Τα προβλήματα ανάθεσης συχνοτήτων και ελέγχου αποδοχής κλήσεων διατυπώνονται ως εξής:

- Δεδομένων χρηστών που επιθυμούν να επικοινωνήσουν με τον σταθμό βάσης τους, το πρόβλημα της ανάθεσης συχνοτήτων συνίσταται στην ανάθεση συχνοτήτων σε κάθε χρήστη του δικτύου έτσι ώστε χρήστες που βρίσκονται στην ίδια ή σε γειτονικές κυψέλες να χρησιμοποιούν διαφορετικές συχνότητες και ο συνολικός αριθμός των χρησιμοποιούμενων συχνοτήτων να ελαχιστοποιείται.
- Δεδομένων κλήσεων (χρηστών που επιθυμούν να επικοινωνήσουν με το σταθμό βάσης τους) σε ένα δίκτυο που κάθε σταθμός βάσης υποστηρίζει  $w$  διαφορετικές συχνότητες, το πρόβλημα του ελέγχου κλήσεων έγκειται στην ανάθεση συχνοτήτων σε κάποιες από τις κλήσεις έτσι ώστε το πολύ  $w$  συχνότητες να χρησιμοποιούνται και ο αριθμός των κλήσεων που εξυπηρετούνται (δηλ. τους ανατίθενται συχνότητες) να μεγιστοποιείται.

Μελετάμε τις on-line εκδοχές των προβλημάτων ανάθεσης συχνοτήτων και ελέγχου αποδοχής κλήσεων. Ακολουθούμε την προσέγγιση της συγκριτικής ανάλυσης (competitive analysis) και χρησιμοποιούμε το συγκριτικό λόγο απόδοσης (competitive ratio) ως μέτρο της απόδοσης των αλγορίθμων. Οι κλήσεις δεν είναι γνωστές εκ των προτέρων αλλά εμφανίζονται σταδιακά. Όταν μια κλήση εμφανιστεί, ένας on-line αλγόριθμος ανάθεσης συχνοτήτων πρέπει να της αναθέσει μια συχνότητα έτσι ώστε να μη δημιουργούνται παρεμβολές με

κλήσεις που εμφανίστηκαν νωρίτερα. Ένας on-line αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων πρέπει είτε να απορρίψει την κλήση (δηλ. να μην της αναθέσει συχνότητα) είτε να την αποδεχτεί και να της αναθέσει μια από τις  $w$  διαθέσιμες συχνότητες έτσι ώστε να μην υπάρχουν παρεμβολές με κλήσεις που έχουν εμφανιστεί προηγουμένως. Και στις δυο περιπτώσεις, οι αποφάσεις του αλγορίθμου δε μπορούν να αλλάξουν στο μέλλον. Ο συγκριτικός λόγος απόδοσης ενός on-line αλγορίθμου ανάθεσης συχνοτήτων εκφράζει τη σχέση του αριθμού των συχνοτήτων που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος με τον αριθμό των συχνοτήτων που χρησιμοποιείται σε μια βέλτιστη ανάθεση ενώ ο συγκριτικός λόγος απόδοσης ενός on-line αλγορίθμου ελέγχου αποδοχής κλήσεων εκφράζει τη σχέση του αριθμού των κλήσεων που αποδέχεται ο αλγόριθμος με το μέγιστο αριθμό κλήσεων που θα μπορούσαν να γίνουν αποδεκτές. Για το πρόβλημα της ανάθεσης συχνοτήτων, παρουσιάζουμε μια σχεδόν αυστηρή ανάλυση της απόδοσης του άπληστου αλγορίθμου. Για το πρόβλημα του ελέγχου αποδοχής κλήσεων, παρουσιάζουμε μια σειρά από πιθανοτικούς on-line αλγορίθμους που επιτυγχάνουν συγκριτικούς λόγους απόδοσης που αποδεδειγμένα δεν μπορούν να επιτευχθούν από ντετερμινιστικούς αλγορίθμους. Οι αλγόριθμοι που αναπτύσσουμε είναι ιδιαίτερα απλοί στην υλοποίηση καθώς χρησιμοποιούν είτε μικρό αριθμό από τυχαία δυαδικά ψηφία είτε αντίστοιχα ασθeneίς πηγές τυχειότητας. Τα αποτελέσματά μας επεκτείνονται στην περίπτωση κυψελικών δικτύων με διαφορετικά γραφήματα παρεμβολής όπως κυψελικά δίκτυα με μεγάλη απόσταση επαναχρησιμοποίησης, μη κανονικά δίκτυα με γραφήματα παρεμβολών σταθερού βαθμού, και δίκτυα με αυθαίρετα γραφήματα παρεμβολών. Τα αποτελέσματα συνοδεύονται από μια σειρά κάτω φραγμάτων για την απόδοση πιθανοτικών on-line αλγορίθμων ελέγχου αποδοχής κλήσεων.

Τα αντίστοιχα προβλήματα είναι ιδιαίτερα σημαντικά και στα δίκτυα αυτόνομων εκπομπών. Σε αυτά τα δίκτυα οι εκπομποί είναι διάσπαρτοι στο επίπεδο. Κάθε εκπομπός καλύπτει μια κυκλική περιοχή με ακτίνα που εξαρτάται από τα τεχνικά χαρακτηριστικά του (πχ. την ισχύ μετάδοσης σήματος που χρησιμοποιεί) και μπορεί να λειτουργεί σε διαφορετική συχνότητα. Υποθέτουμε ότι ένας εκπομπός μεταδίδει χωρίς παρεμβολές σήματος όταν η κυκλική περιοχή εμβέλειάς του δεν επικαλύπτεται με την κυκλική περιοχή εμβέλειας κάποιου άλλου εκπομπού ο οποίος χρησιμοποιεί την ίδια συχνότητα. Η αναπαράσταση των πιθανών παρεμβολών μεταξύ εκπομπών, όταν χρησιμοποιούν την ίδια συχνότητα, μοντελοποιείται από γραφήματα δίσκων. Ένα γράφημα λέγεται γράφημα δίσκων όταν κάθε κόμβος του μπορεί να αντιστοιχηθεί σε μια κυκλική περιοχή στο επίπεδο κατά τέτοιο τρόπο ώστε δυο κυκλικές περιοχές να επικαλύπτονται ή να εφάπτονται αν και μόνο αν υπάρχει ακμή μεταξύ των αντίστοιχων κόμβων στο γράφημα. Θεωρώντας τις συχνότητες σα χρώματα, το πρόβλημα της ανάθεσης συχνοτήτων για δίκτυα εκπομπών είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα

ελάχιστου χρωματισμού του γραφήματος δίσκων που μοντελοποιεί τις πιθανές παρεμβολές σήματος. Η σημαντική ειδική περίπτωση του προβλήματος ελέγχου αποδοχής κλήσεων όπου κάθε εκπομπός μπορεί να λειτουργεί σε μια συγκεκριμένη συχνότητα είναι ισοδύναμη με το πρόβλημα εύρεσης μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου κόμβων στο αντίστοιχο γράφημα δίσκων.

Μελετάμε τις on-line εκδοχές των προβλημάτων εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων και χρωματισμού σε γραφήματα δίσκων (disk graphs). Πάλι, ακολουθούμε την προσέγγιση της συγκριτικής ανάλυσης και χρησιμοποιούμε το συγκριτικό λόγο απόδοσης ως μέτρο της απόδοσης των αλγορίθμων. Οι κόμβοι του γραφήματος δεν είναι γνωστοί εκ των προτέρων αλλά εμφανίζονται σταδιακά. Όταν ένας κόμβος εμφανιστεί, ένας on-line αλγόριθμος χρωματισμού πρέπει να αναθέσει στον κόμβο ένα χρώμα διαφορετικό από αυτά που έχουν ανατεθεί σε γειτονικούς του κόμβους που έχουν εμφανιστεί προηγουμένως. Ένας on-line αλγόριθμος εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων ξεκινά από ένα κενό ανεξάρτητο σύνολο κόμβων το οποίο επεκτείνει σταδιακά. Όταν εμφανιστεί ένας νέος κόμβος, ο αλγόριθμος πρέπει να αποφασίσει αν ο κόμβος θα συμπεριληφθεί στο ανεξάρτητο σύνολο ή όχι. Και στις δυο περιπτώσεις, οι αποφάσεις ενός on-line αλγόριθμου χρωματισμού ή εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων δε μπορούν να αλλάξουν στο μέλλον. Ο συγκριτικός λόγος απόδοσης ενός on-line αλγορίθμου χρωματισμού εκφράζει τη σχέση του αριθμού των χρωμάτων που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος για ένα γράφημα δίσκων με τον αριθμό χρωμάτων που χρησιμοποιούνται σε ένα βέλτιστο χρωματισμό. Ο συγκριτικός λόγος απόδοσης ενός on-line αλγορίθμου εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων εκφράζει τη σχέση του μεγέθους του ανεξάρτητου συνόλου που υπολογίζει ο αλγόριθμος με το μέγεθος του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου. Για το πρόβλημα της εύρεσης ανεξαρτήτων συνόλων σε γραφήματα δίσκων, παρουσιάζουμε τους πρώτους πιθανοτικούς on-line αλγορίθμους. Αποδεικνύουμε άνω και κάτω φράγματα για το συγκριτικό λόγο απόδοσής τους, τόσο στην περίπτωση που η αναπαράσταση δίνεται σα μέρος της εισόδου όσο και στην περίπτωση που η είσοδος αποτελείται μόνο από τους κόμβους και τις ακμές του γραφήματος δίσκων. Προφανώς, η δεύτερη περίπτωση είναι πιο δύσκολη από την πρώτη. Στην περίπτωση που η αναπαράσταση δίνεται σα μέρος της εισόδου, παρουσιάζουμε on-line αλγορίθμους με σημαντικά καλύτερους συγκριτικούς λόγους απόδοσης από τα γνωστά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας για ντετερμινιστικούς on-line αλγορίθμους. Σημειώνουμε ότι, οι συγκριτικοί λόγοι απόδοσης που πετυχαίνουμε, αποδεδειγμένα δε μπορούν να επιτευχθούν από ντετερμινιστικούς on-line αλγορίθμους. Οι αλγόριθμοι που παρουσιάζουμε επεκτείνονται και λειτουργούν και σε γενικεύσεις του προβλήματος που μοντελοποιούν το πρόβλημα ελέγχου αποδοχής κλήσεων σε δίκτυα εκπομπών επιτυγχάνοντας τους ίδιους συγκριτικούς λόγους απόδοσης. Για την περίπτωση που η αναπαράσταση δε δίνεται σα μέρος της



εισόδου, αποδεικνύουμε κάτω φράγματα που δείχνουν ότι ένας ιδιαίτερα απλός διαισθητικός ντετερμινιστικός on-line αλγόριθμος έχει ασυμπτωτικά βέλτιστο συγκριτικό λόγο απόδοσης. Αυτό το αποτέλεσμα υπονοεί ότι η χρήση τυχαιότητας δεν μπορεί να οδηγήσει σε καλύτερες λύσεις. Για το πρόβλημα χρωματισμού γραφημάτων δίσκων, παρουσιάζουμε έναν νέο on-line αλγόριθμο που δε χρησιμοποιεί την αναπαράσταση και επιτυγχάνει τον ίδιο συγκριτικό λόγο απόδοσης με τον καλύτερο γνωστό αλγόριθμο της βιβλιογραφίας που χρησιμοποιεί την αναπαράσταση. Το αποτέλεσμα αυτό βελτιώνει σημαντικά το προηγούμενο καλύτερο γνωστό άνω φράγμα για on-line αλγορίθμους χρωματισμού που δε χρησιμοποιούν την αναπαράσταση της εισόδου.

# Independent Sets and Graph Coloring with Applications to the Frequency Allocation Problem in Wireless Networks

EVI PAPAIOANNOU

## Abstract

The subject of this dissertation thesis is the study of issues arising in communication networks that utilize Frequency Division Multiplexing (FDM). We consider networks based on telecommunication infrastructure such as cellular mobile telephone networks and networks of autonomous transmitters, like ad hoc wireless networks. We represent these networks using graphs and model the corresponding communication problems as combinatorial optimization problems in such graphs. Our results include new on-line algorithms which outperform previously known algorithms as well as new lower bounds.

In cellular networks, a geographical region is virtually divided into sub-regions called cells. Each cell is the calling area of a base station which enables wireless communication. Each base station is responsible for servicing users located within its range. Communication between two users of a cellular network involves in the first place communication between each user and the base station that services the cell where the user is located. Then, communication between the base stations must be established. Wireless communication between users and their base station is always involved, even when both of the users are located in the same cell or only one of them uses the cellular network and the other uses, for example, the standard telephone network. Two users located close to each other can simultaneously communicate with their base station via Frequency Division Multiplexing technology, using different frequencies. Usually, the use of the same frequency by users located in the same or adjacent cells causes signal interference, thus, making communication hard or impossible to establish. The basic cellular network model assumes base stations equipped with equivalent transmitters, uniformly distributed on the plane. Therefore, the plane is divided in cells of hexagon shape. In fact, cells can have irregular shape and it may be the case that the signal interference constraints regarding the reuse of

frequencies by different users are even harder and more complicated. We model such constraints through interference graphs where nodes correspond to cells of the network and an edge between two nodes  $u$  and  $v$  states that the assignment of the same frequency to users located in cells corresponding to the nodes  $u$  and  $v$  would cause signal interference. In cellular networks, an important communication problem to be solved is the assignment of frequencies to the users so that they can communicate with their base station without signal interference. Since the available frequency spectrum is limited, its efficient utilization is critical and essential. Frequency allocation and call control are the most fundamental problems to be solved for the efficient use of the frequency spectrum and can be defined as follows:

- The frequency allocation problem is to assign frequencies to the users so that signal interference is avoided, while minimizing the total number of frequencies used.
- The call control problem in a network that supports a spectrum of  $w$  available frequencies is to assign frequencies to users so that signal interference is avoided, while maximizing the number of users served.

We consider the on-line version of both the frequency allocation and the call control problems. We follow the competitive analysis approach and we use the competitive ratio as a measure for evaluating the performance of an algorithm. Calls are not known a priori and appear gradually. When a new call appears, an on-line frequency allocation algorithm must assign it a frequency so that signal interference with calls previously appeared is avoided. An on-line call control algorithm must either reject (not assign a frequency) or accept the call by assigning it one of the  $w$  available frequencies so that signal interference is avoided. In both cases, the decisions of the algorithm cannot change in the future. The competitive ratio of an on-line frequency allocation algorithm indicates the relation between the number of frequencies used by the algorithm and the number of frequencies used in an optimal assignment. The competitive ratio of an on-line call control algorithm indicates the relation between the number of calls accepted by the algorithm and the maximum number of calls that could have been accepted. For the frequency allocation problem, we present an almost tight analysis of the greedy algorithm. For the call control problem, we present a series of randomized on-line algorithms with competitive ratios that deterministic algorithms cannot achieve. Our algorithms are simple in the sense that they use a small number of random bits or weak random sources for making their random choices. Our results can be extended to cellular

networks with various interference graphs, like cellular networks with high reuse distance, irregular networks with interference graphs of small degree, as well as networks with arbitrary interference graphs. We also present new corresponding lower bounds for randomized on-line call control algorithms.

The frequency allocation and the call control problems are also essential in the case of networks of autonomous transmitters. In such networks, transmitters are distributed in the plane, each of them covers a circular region whose range depends on the technical specification of the transmitter (e.g. its transmission power) and can operate at a different frequency. We assume that transmission without signal interference requires that the range of each transmitter does not overlap with the range of other transmitters operating at the same frequency. Possible signal interference between transmitters operating at the same frequency is modelled by disk graphs, where each node corresponds to a circular region on the plane so that two such regions overlap or are adjacent if and only if there exists an edge connecting the corresponding nodes in the graph. If we consider frequencies as colors, the frequency allocation problem in networks of transmitters is equivalent to the minimum coloring problem in the disk graph modelling possible signal interference. The important special case of the call control problem where each transmitter operates at a particular frequency is equivalent to the maximum independent set problem in the corresponding disk graph.

We study the on-line version of both the maximum independent set and the minimum coloring problems in disk graphs. Again, we follow the competitive analysis approach and use the competitive ratio as a measure for the evaluation of the performance of our algorithms. The nodes of the graph are not known in advance and appear gradually. When a new node appears, an on-line coloring algorithm must assign it a color different from those assigned to previously appeared adjacent nodes. An on-line independent set algorithm starts from an empty set of nodes and gradually expands it. When a new node appears, the algorithm must decide whether to include this node in the set. In both cases, the on-line algorithm cannot change its decisions in the future. The competitive ratio of an on-line coloring algorithm indicates the relation between the number of colors used by the algorithm and the number of colors in an optimal coloring. The competitive ratio of an on-line independent set algorithm indicates the relation between the size of the independent set computed by the algorithm and the size of the maximum independent set.

For the independent set problem in disk graphs, we present the first new randomized on-line algorithms. We prove upper and lower bounds for their competitive ratios either if the disk representation is given as part of the

input or if only the nodes and edges of the disk graph constitute the input. Obviously, the latter case is harder. When the disk representation is given as part of the input, we present on-line algorithms with significantly better competitive ratios than the known results in the literature obtained by deterministic on-line algorithms. Note that, the competitive ratios achieved by our algorithms outperform those obtained by deterministic on-line algorithms. Furthermore, our algorithms can extend also to more general cases that model the call control problem in networks of transmitters obtaining similar competitive ratios. When the disk representation is not given as part of the input, we prove lower bounds indicating that a particularly simple, intuitive, deterministic on-line algorithm can achieve a competitive ratio which is asymptotically optimal. This particular result implies that the use of randomization cannot help in improving the competitiveness of on-line independent set algorithms. For the coloring problem in disk graphs, we present a new on-line algorithm that does not make use of the disk representation and achieves a competitive ratio similar to the one obtained by the best-known algorithm in the literature that uses the disk representation. This particular result significantly improves the best previously known upper bound for on-line coloring algorithms that do not use the disk representation.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Ανάθεση συχνοτήτων και έλεγχος αποδοχής κλήσεων σε ασύρματα δίκτυα . . . . .	3
1.2	Εύρεση ανεξάρτητων συνόλων και χρωματισμοί γραφημάτων . .	5
1.3	Εκτίμηση απόδοσης on-line αλγορίθμων . . . . .	6
1.4	Η συνεισφορά της διατριβής . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Ανάθεση συχνοτήτων σε κυψελικά δίκτυα</b>	<b>11</b>
2.1	Ο άπληστος αλγόριθμος ανάθεσης συχνοτήτων . . . . .	13
2.2	Ανάλυση της απόδοσης του άπληστου αλγορίθμου . . . . .	14
2.3	Κάτω φράγμα για την απόδοση του άπληστου αλγορίθμου . . .	21
<b>3</b>	<b>Έλεγχος αποδοχής κλήσεων σε ασύρματα δίκτυα</b>	<b>23</b>
3.1	Περιγραφή γνωστών αλγορίθμων . . . . .	27
3.2	Ο αλγόριθμος $p$ -RANDOM . . . . .	30
3.3	Ανάλυση του αλγορίθμου $p$ -RANDOM για αραιά δίκτυα . . . . .	40
3.3.1	Ανάλυση του $p$ -RANDOM για δίκτυα βαθμού 3 . . . . .	42
3.3.2	Ανάλυση του $p$ -RANDOM για δίκτυα βαθμού 4 . . . . .	46
3.4	Ανάλυση του αλγορίθμου $p$ -RANDOM για αυθαίρετα δίκτυα . .	47
3.5	Ένας απλός αλγόριθμος με συγκριτικό λόγο απόδοσης $8/3$ . .	49
3.6	Αλγόριθμοι “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής” . . . . .	51
3.7	Δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης $k > 2$ . . . . .	55
3.8	Κάτω φράγματα . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Γραφήματα Δίσκων</b>	<b>71</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	71
4.2	Εύρεση ανεξάρτητων συνόλων σε $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων	76
4.2.1	Άνω φράγματα . . . . .	76
4.2.2	Κάτω φράγματα . . . . .	85

4.3	Εύρεση ανεξάρτητων συνόλων σε γραφήματα μοναδιαίων δίσκων	94
4.4	Ένα άνω φράγμα για on-line χρωματισμό . . . . .	99
5	<b>Συμπεράσματα - Μελλοντική έρευνα</b>	<b>103</b>



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Η ανάπτυξη των δικτύων επικοινωνίας που συντελέστηκε τα τελευταία χρόνια με την ανάπτυξη, εγκατάσταση και παροχή στο χρήστη ευέλικτων ασύρματων και κινητών δικτύων (π.χ., δίκτυα κινητής τηλεφωνίας, bluetooth, ασύρματα δίκτυα τύπου ad hoc, δίκτυα αισθητήρων, ασύρματα ευρυζωνικά δίκτυα, κλπ.) δεν συνοδεύτηκε από αντίστοιχους νεωτερισμούς σε μεθόδους και τεχνικές για την αποδοτική πρόσβαση στα νέα μέσα μετάδοσης και την αξιοποίησή τους. Η χρήση των νέων μέσων μετάδοσης συνήθως βασίζεται σε τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν με επιτυχία στο παρελθόν και οι οποίες όμως συχνά αποδεικνύονται μη αποδοτικές σήμερα στην πράξη. Είναι πλέον αναγκαία η ανάπτυξη νέων πρωτοκόλλων και αλγορίθμων που θα επιτρέπουν την αποδοτική χρήση των νέων μέσων με τρόπο που θα λαμβάνει υπόψη τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους.

Το πρόβλημα της ανάθεσης συχνοτήτων έχει πολλές εφαρμογές στα ασύρματα δίκτυα επικοινωνίας (radio networks) και στα κυψελικά δίκτυα (mobile - cellular networks), και αφορά στην ανάθεση συχνοτήτων σε μεταδότες σήματος ώστε να αποφευχθούν ή να ελαχιστοποιηθούν οι παρεμβολές (οι οποίες συμβαίνουν όταν πομποί που εκπέμπουν στην ίδια ή σε κοντινές γεωγραφικές περιοχές λειτουργούν στην ίδια ή σε γειτονικές συχνότητες). Λόγω των συνεχών αυξανόμενων απαιτήσεων για επικοινωνία οι οποίες τείνουν να υπερκεράσουν την αύξηση στο εκμεταλλεύσιμο φάσμα, η ανάγκη για αποτελεσματική διαχείριση του φάσματος απαιτεί την ανάθεση συχνοτήτων κατά βέλτιστο ή σχεδόν βέλτιστο τρόπο. Όταν μια συγκεκριμένη συχνότητα χρησιμοποιείται σε μια κυψέλη του δικτύου δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για άλλη κλήση στην κυψέλη αυτή και στις γειτονικές της, γιατί οι κλήσεις θα παρεμβάλλονταν μεταξύ τους. Από την άλλη πλευρά, η συχνότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υποστηρίξει κλήσεις σε γεωγραφικά απομακρυσμένες κυψέλες (επανα-

χρησιμοποίηση συχνοτήτων).

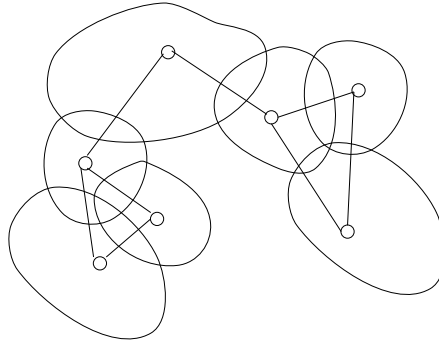
Σε ένα ασύρματο δίκτυο επικοινωνίας η ακτίνα (εμβέλεια) μετάδοσης των πομπών συνήθως επικαλύπτεται. Αν υποθέσουμε ότι ένας δέκτης χρησιμοποιεί κάποια συγκεκριμένη συχνότητα, είναι γνωστό ότι όταν υπάρχουν παρεμβολές από άλλους πομπούς της περιοχής, το λαμβανόμενο σήμα υποβαθμίζεται. Οι παρεμβολές μπορούν να δημιουργούνται από πομπούς που μεταδίδουν χρησιμοποιώντας την ίδια συχνότητα και βρίσκονται στην ίδια περιοχή, αλλά και από πομπούς που μεταδίδουν χρησιμοποιώντας “κοντινές” συχνότητες, αφού πρακτικά ούτε οι πομποί αλλά ούτε και οι δέκτες λειτουργούν ακριβώς στην προκαθορισμένη συχνότητα. Το πρόβλημα σε αυτή την κατηγορία δικτύων είναι, με δεδομένο ένα σύνολο πομπών να καθοριστεί η συχνότητα λειτουργίας του καθενός, ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι παρεμβολές, ο μέγιστος αριθμός συχνοτήτων που έχει ανατεθεί και ο αριθμός των διαφορετικών συχνοτήτων που έχουν χρησιμοποιηθεί/ανατεθεί. Οι αποδοτικές τεχνικές ανάθεσης συχνοτήτων σε ένα κυψελικό δίκτυο πρέπει να εγγυώνται ότι δεν συμβαίνουν παρεμβολές και να μεγιστοποιούν την επαναχρησιμοποίηση συχνοτήτων στο δίκτυο, ώστε να υπάρχουν όσο το δυνατόν περισσότερες συχνότητες διαθέσιμες σε κάθε κυψέλη και παράλληλα να μεγιστοποιείται ο αριθμός των κλήσεων που μπορεί να υποστηρίξει το δίκτυο. Οι αλγόριθμοι και οι τεχνικές αυτές χωρίζονται σε διάφορες κατηγορίες με βάση τον τρόπο που διαμοιράζονται οι συχνότητες και τον τρόπο εκτέλεσης των αλγορίθμων στο δίκτυο. Στους αλγορίθμους σταθερών αναθέσεων, γίνεται αρχικά κάποια καταχώρηση συχνοτήτων στις κυψέλες ώστε να καλύπτονται οι ανάγκες της περιοχής που καλύπτει η κάθε μία (π.χ. περισσότερες συχνότητες σε μια κυψέλη που καλύπτει μια πυκνοκατοικημένη περιοχή) και να εξασφαλίζεται μεγάλη επαναχρησιμοποίηση συχνοτήτων. Οι αλγόριθμοι σταθερών αναθέσεων είναι συνήθως απλοί αλλά δεν προσαρμόζονται εύκολα στις αλλαγές φόρτου στο δίκτυο και κατανομής των κλήσεων. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της προσαρμοστικότητας στις αλλαγές φόρτου (όταν σε μία περιοχή με μικρό αριθμό διαθέσιμων συχνοτήτων εμφανίζονται περισσότερες αιτήσεις) έχουν προταθεί διάφοροι αλγόριθμοι δανεισμού συχνοτήτων. Οι αλγόριθμοι δυναμικών αναθέσεων προσαρμόζονται περισσότερο στις αλλαγές φόρτου αλλά παρουσιάζουν μεγαλύτερη πολυπλοκότητα, απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ και χρόνο αρχικοποίησης κλήσεων. Μια άλλη τεχνική ανάλυσης και σχεδίασης αλγορίθμων δυναμικών αναθέσεων είναι και η συγκριτική ανάλυση on-line αλγορίθμων (αλγορίθμων που αποφασίζουν ποιες αιτήσεις θα ικανοποιήσουν χωρίς να γνωρίζουν τις μελλοντικές αιτήσεις, όπως συμβαίνει στα πραγματικά κυψελικά δίκτυα). Με βάση την τεχνική αυτή η απόδοση ενός on-line αλγορίθμου πάνω σε μια άγνωστη ακολουθία αιτήσεων συγκρίνεται με αυτή του βέλτιστου αλγορίθμου πάνω στην ίδια ακολουθία (η απόδοση εκφράζει τον αριθμό των αιτήσεων που έγιναν αποδεκτές).

## 1.1 Ανάθεση συχνοτήτων και έλεγχος αποδοχής κλήσεων σε ασύρματα δίκτυα

Θεωρούμε ασύρματα δίκτυα στα οποία σταθμοί βάσης χρησιμοποιούνται για την κατασκευή της απαιτούμενης υποδομής. Σε τέτοια δίκτυα, η αρχιτεκτονική προσέγγιση που χρησιμοποιείται είναι η εξής. Μια γεωγραφική περιοχή στην οποία λαμβάνει χώρα η επικοινωνία χωρίζεται σε μικρότερες περιοχές. Κάθε μια από αυτές είναι η περιοχή εμβέλειας ενός σταθμού βάσης. Οι σταθμοί βάσης διασυνδέονται μέσω ενός δικτύου υψηλής ταχύτητας. Όταν ένας χρήστης A επιθυμεί να επικοινωνήσει με κάποιον χρήστη B, ένα μονοπάτι πρέπει να εγκαθιδρυθεί μεταξύ των σταθμών βάσης των περιοχών στις οποίες βρίσκονται οι χρήστες A και B. Στη συνέχεια η επικοινωνία πραγματοποιείται σε τρία βήματα: (α) ασύρματη επικοινωνία μεταξύ του A και του σταθμού βάσης του, (β) επικοινωνία μεταξύ των σταθμών βάσης, και (γ) ασύρματη επικοινωνία μεταξύ του B και του σταθμού βάσης του. Επομένως, η μετάδοση ενός μηνύματος από τον A στο B απαιτεί πρώτα επικοινωνία μεταξύ του A και του σταθμού βάσης του, στη συνέχεια ο σταθμός βάσης του A στέλνει το μήνυμα στο σταθμό βάσης του B ο οποίος θα το μεταδώσει στον B. Τουλάχιστο ένα σταθμός βάσης συμμετέχει στην επικοινωνία ακόμα κι αν και οι δύο χρήστες βρίσκονται στην ίδια περιοχή ή μόνο ένας από τους δύο αποτελεί τμήμα του ασύρματου δικτύου (και ο άλλος χρησιμοποιεί για παράδειγμα το Δημόσιο Τηλεφωνικό Δίκτυο PSTN).

Πολλοί χρήστες στην ίδια περιοχή μπορούν να επικοινωνούν ταυτόχρονα με το σταθμό βάσης τους. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της τεχνικής πολύπλεξης διαμοιρασμού συχνότητας (FDM). Ο σταθμός βάσης είναι υπεύθυνος για την ανάθεση διακριτών συχνοτήτων από το διαθέσιμο φάσμα στους χρήστες έτσι ώστε να αποφεύγονται οι παρεμβολές στην ίδια κυψέλη ή μεταξύ γειτονικών κυψελών. Επειδή το διαθέσιμο φάσμα συχνοτήτων είναι περιορισμένο, το σημαντικό πρόβλημα που ανακύπτει σχετίζεται με την αποδοτική επαναχρησιμοποίηση των συχνοτήτων.

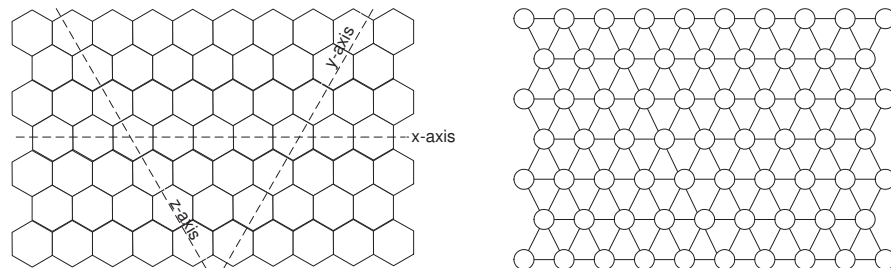
Οι παρεμβολές σε ένα κυψελικό δίκτυο μπορούν να αναπαρασταθούν μέσω ενός *γραφήματος παρεμβολών*  $G$ . Οι κορυφές του γραφήματος αντιστοιχούν σε κυψέλες και μια ακμή  $(u, v)$  στο γράφημα δηλώνει ότι η ανάθεση της ίδιας συχνότητας σε δύο χρήστες που βρίσκονται στις κυψέλες που αντιστοιχούν στις κορυφές  $u$  και  $v$  θα προκαλέσει παρεμβολές. Στη γενική περίπτωση, οι σταθμοί βάσης δεν είναι ισοδύναμοι (δηλ., δεν έχουν την ίδια εμβέλεια) και δεν είναι κατανεμημένοι ομοιόμορφα στο δίκτυο, κι επομένως οι κυψέλες έχουν ακανόνιστα σχήματα. Ένα τέτοιο δίκτυο και το αντίστοιχο γράφημα παρεμβολών του φαίνονται στο Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Ένα ασύρματο κυψελικό δίκτυο και το αντίστοιχο γράφημα παρεμβολών.

Στην ιδανική περίπτωση, θεωρούμε ομοιόμορφη κατανομή πανομοιότυπων σταθμών βάσης στο δίκτυο, καθώς επίσης και ότι η περιοχή εμβέλειας ενός σταθμού βάσης είναι ένας κύκλος, ο οποίος, για λόγους απλότητας, κανονικοποιείται σαν ένα κανονικό εξάγωνο. Ένα ιδεατό ασύρματο κυψελικό δίκτυο παρουσιάζεται στο αριστερό μέρος του Σχήματος 1.2.

Παρεμβολές δημιουργούνται όταν η ίδια συχνότητα ανατίθεται σε χρήστες που βρίσκονται στην ίδια ή σε γειτονικές κυψέλες. Εναλλακτικά, σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι το κυψελικό δίκτυο έχει απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2. Γενικεύοντας αυτή την παράμετρο, παίρνουμε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k$  στα οποία παρεμβολές μεταξύ χρηστών στους οποίους έχει ανατεθεί η ίδια συχνότητα αποφεύγονται αν και μόνον αν οι χρήστες βρίσκονται σε κυψέλες με απόσταση τουλάχιστο  $k$  μεταξύ τους. Το γράφημα παρεμβολών ενός κυψελικού δικτύου με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2 παρουσιάζεται δεξιά στο Σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: Ένα κυψελικό δίκτυο και το αντίστοιχο γράφημα παρεμβολών αν η απόσταση επαναχρησιμοποίησης είναι 2.

Ορίζουμε ως βαθμό μιας κυψέλης  $v$  τον αριθμό των γειτονικών κυψελών της  $v$ . Ο βαθμός του δικτύου είναι ο μέγιστος από τους βαθμούς όλων των κυψελών του δικτύου. Ισοδύναμα, ο βαθμός του δικτύου είναι ο μέγιστος βαθμός του αντίστοιχου γραφήματος παρεμβολών.

Σε ασύρματα δίκτυα, δεδομένων χρηστών που επιθυμούν να επικοινωνήσουν, δύο είναι τα προβλήματα που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και αποτελούν αντικείμενο μελέτης της παρούσας διατριβής:

- Το πρόβλημα *ανάθεσης συχνοτήτων*, στόχος του οποίου είναι η ανάθεση συχνοτήτων στους χρήστες κατά τέτοιο τρόπο ώστε να αποφεύγονται παρεμβολές και να ελαχιστοποιείται ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων συχνοτήτων.
- Το πρόβλημα *ελέγχου αποδοχής κλήσεων*, στόχος του οποίου είναι κατανομή ενός φάσματος  $w$  διαθέσιμων συχνοτήτων στους χρήστες έτσι ώστε να αποφεύγονται παρεμβολές και να μεγιστοποιείται ο αριθμός των χρηστών που εξυπηρετούνται.

Θεωρούμε ότι οι κλήσεις που αντιστοιχούν σε χρήστες που επιθυμούν να επικοινωνήσουν εμφανίζονται στις κυψέλες του δικτύου με on-line τρόπο. Όταν εμφανίζεται μια κλήση, ένας αλγόριθμος ανάθεσης συχνοτήτων εξυπηρετεί την κλήση αναθέτοντας σε αυτή είτε μία από τις συχνότητες που ήδη χρησιμοποιούνται είτε κάποια καινούρια, ενώ ένας αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων αποφασίζει είτε να αποδεχτεί την κλήση (αναθέτοντας μια συχνότητα σε αυτή), είτε να την απορρίψει. Και στις δύο περιπτώσεις στόχος είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους με την ταυτόχρονη αποφυγή των παρεμβολών, δηλ., της χρησιμοποίησης όσων το δυνατόν λιγότερων συχνοτήτων και της εξυπηρέτησης όσο το δυνατόν περισσότερων χρηστών, αντίστοιχα. Από τη στιγμή που μια κλήση έχει γίνει αποδεκτή, δε μπορεί να απορριφθεί (preempted). Επιπλέον, η συχνότητα που ανατέθηκε στην κλήση δε μπορεί να τροποποιηθεί στο μέλλον. Θεωρούμε ότι όλες οι κλήσεις έχουν άπειρη διάρκεια, υπόθεση που είναι ισοδύναμη με τη θεώρηση κλήσεων ίδια διάρκειας.

## 1.2 Εύρεση ανεξάρτητων συνόλων και χρωματισμοί γραφημάτων

Το πρόβλημα ανάθεσης συχνοτήτων σε ασύρματα δίκτυα ισοδυναμεί με το πρόβλημα πολυχρωματισμού των κορυφών ενός γραφήματος. Συγκεκριμένα, δεδομένου του γραφήματος παρεμβολών ενός ασύρματου κυψελικού δικτύου, αν φανταστούμε τις συχνότητες σα χρώματα, τότε η ανάθεση συχνοτήτων

στους χρήστες του δικτύου ισοδυναμεί με το χρωματισμό των κορυφών του γραφήματος παρεμβολών. Ο χρωματισμός πρέπει να χρησιμοποιεί τον ελάχιστο δυνατό αριθμό χρωμάτων (δηλ., η επικοινωνία των χρηστών να επιτυγχάνεται με τη χρήση του ελάχιστου δυνατού αριθμού συχνοτήτων) και κορυφές του γραφήματος παρεμβολών μεταξύ των οποίων υπάρχει ακμή πρέπει να λαμβάνουν διαφορετικό χρώμα (δηλ., χρήστες που είναι “κοντά” με βάση την απόσταση επαναχρησιμοποίησης του δικτύου, να λαμβάνουν διαφορετικές συχνότητες).

Το πρόβλημα ελέγχου αποδοχής κλήσεων σε ασύρματα δίκτυα αποτελεί γενίκευση του προβλήματος εύρεσης μέγιστων ανεξάρτητων συνόλων σε γραφήματα. Και στην περίπτωση αυτή, δεδομένου του γραφήματος παρεμβολών ενός ασύρματου κυψελικού δικτύου και ενός φάσματος  $w$  διαθέσιμων συχνοτήτων, αν φανταστούμε τις συχνότητες σα χρώματα, αυτό που πρέπει να πετύχουμε είναι να χρωματίσουμε όσο μπορούμε περισσότερες κορυφές του γραφήματος (δηλ., να εξυπηρετήσουμε όσους περισσότερους χρήστες μπορούμε) χρησιμοποιώντας τα  $w$  διαθέσιμα χρώματα (δηλ., τις  $w$  διαθέσιμες συχνότητες). Όταν μόνο μία συχνότητα είναι διαθέσιμη ( $w = 1$ ) το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα εύρεσης μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου.

Άρα, στην περίπτωση του προβλήματος ανάθεσης συχνοτήτων σε ασύρματα (κυψελικά) δίκτυα, αυτό που ουσιαστικά προσπαθούμε να λύσουμε βέλτιστα είναι το αντίστοιχο πρόβλημα ελάχιστου χρωματισμού του υποκείμενου γραφήματος παρεμβολών του δικτύου. Ενώ, στην περίπτωση του προβλήματος ελέγχου αποδοχής κλήσεων σε ασύρματα (κυψελικά) δίκτυα, προσπαθούμε να δώσουμε βέλτιστες λύσεις στο πρόβλημα εύρεσης μέγιστων ανεξάρτητων συνόλων στο υποκείμενο γράφημα παρεμβολών του δικτύου. Ασχολούμαστε με τις on-line εκδοχές των προβλημάτων εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων και χρωματισμού. Αυτό σημαίνει ότι δε γνωρίζουμε εκ των προτέρων το γράφημα αλλά οι κορυφές του εμφανίζονται σταδιακά, και κάθε φορά που εμφανίζεται μια νέα κορυφή, ο αλγόριθμός μας πρέπει να αποφασίσει χωρίς να γνωρίζει πού θα εμφανιστεί η επόμενη, είτε αν θα χρωματίσει την κορυφή με κάποιο από τα χρώματα που ήδη έχουν χρησιμοποιηθεί ή θα χρησιμοποιήσει ένα καινούριο επιπλέον χρώμα, είτε αν θα συμπεριλάβει μια κορυφή στο τρέχον ανεξάρτητο σύνολο, ή θα κατασκευάσει ένα νέο.

### 1.3 Εκτίμηση απόδοσης on-line αλγορίθμων

Η συγκριτική ανάλυση [54] έχει χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της απόδοσης on-line αλγορίθμων για διάφορα προβλήματα. Στην περίπτωσή μας, δεδομένης μιας ακολουθίας κλήσεων, η απόδοση ενός on-line αλγορίθμου  $A$  συγκρίνεται με την απόδοσης του βέλτιστου αλγορίθμου  $OPT$ .

Για την εκτίμηση της απόδοσης αλγορίθμων ανάθεσης συχνοτήτων, καλούμε με  $C_A(\sigma)$  το κόστος ενός on-line αλγορίθμου  $A$  για μια ακολουθία κλήσεων  $\sigma$ , δηλ. τον αριθμό των συχνοτήτων που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος  $A$ , και  $C_{OPT}(\sigma)$  το κόστος του βέλτιστου αλγορίθμου  $OPT$ . Αν ο αλγόριθμος  $A$  είναι ντετερμινιστικός, ορίζουμε το συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\rho$  ως

$$\rho = \max_{\sigma} \frac{C_A(\sigma)}{C_{OPT}(\sigma)},$$

όπου το μέγιστο λαμβάνεται μεταξύ όλων των πιθανών ακολουθιών κλήσεων. Αν ο αλγόριθμος  $A$  είναι πιθανοτικός, ορίζουμε το συγκριτικό λόγο απόδοσής του  $\rho$  ως

$$\rho = \max_{\sigma} \frac{\mathcal{E}[C_A(\sigma)]}{C_{OPT}(\sigma)},$$

όπου  $\mathcal{E}[C_A(\sigma)]$  είναι η μέση τιμή του αριθμού των συχνοτήτων που χρησιμοποιούνται από τον αλγόριθμο  $A$ , και το μέγιστο λαμβάνεται μεταξύ όλων των δυνατών ακολουθιών κλήσεων που είναι δυνατόν να παρουσιαστούν στον αλγόριθμο.

Για την εκτίμηση της απόδοσης αλγορίθμων ελέγχου αποδοχής κλήσεων, έστω  $B_A(\sigma)$  το κέρδος από την εκτέλεση ενός on-line αλγορίθμου  $A$  για την ακολουθία κλήσεων  $\sigma$ , δηλαδή ο αριθμός των κλήσεων της ακολουθίας  $\sigma$  που γίνονται αποδεκτές από τον αλγόριθμο  $A$  και  $B_{OPT}(\sigma)$  το κέρδος από την εκτέλεση του βέλτιστου αλγορίθμου  $OPT$ . Στην περίπτωση που ο  $A$  είναι ντετερμινιστικός, ορίζουμε ως συγκριτικό λόγο απόδοσής του  $\rho$  τον

$$\rho = \max_{\sigma} \frac{B_{OPT}(\sigma)}{B_A(\sigma)},$$

όπου το μέγιστο λαμβάνεται μεταξύ όλων των πιθανών ακολουθιών κλήσεων. Στην περίπτωση που ο  $A$  είναι πιθανοτικός αλγόριθμος, ορίζουμε ως συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\rho$  το

$$\rho = \max_{\sigma} \frac{B_{OPT}(\sigma)}{\mathcal{E}[B_A(\sigma)]},$$

όπου  $\mathcal{E}[B_A(\sigma)]$  είναι η μέση τιμή του αριθμού κλήσεων που γίνονται δεκτές από τον  $A$ , και το μέγιστο λαμβάνεται μεταξύ όλων των δυνατών ακολουθιών κλήσεων που είναι δυνατόν να παρουσιαστούν στον αλγόριθμο.

Συνήθως, συγκρίνουμε την απόδοση ντετερμινιστικών αλγορίθμων με *off-line* αντιπάλους (off-line adversaries), δηλαδή αντιπάλους που γνωρίζουν εκ των προτέρων τη συμπεριφορά του ντετερμινιστικού αλγορίθμου. Για πιθανοτικούς αλγόριθμους θεωρούμε *αντιπάλους "χωρίς μνήμη"* (oblivious adversaries) των οποίων η γνώση περιορίζεται στην κατανομή πιθανότητας των τυχαίων επιλογών του πιθανοτικού αλγορίθμου.

## 1.4 Η συνεισφορά της διατριβής

Στην παρούσα διατριβή, μελετάμε την on-line εκδοχή και των προβλημάτων κατανομής συχνοτήτων και ελέγχου αποδοχής κλήσεων με χρήση της μεθόδου συγκριτικής ανάλυσης. Παρουσιάζουμε νέους αλγόριθμους και κάτω φράγματα για κυψελικές, επίπεδες και αυθαίρετες δικτυακές τοπολογίες.

Για το πρόβλημα της ανάθεσης συχνοτήτων σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2, βελτιώνουμε τον καλύτερο γνωστό συγκριτικό λόγο απόδοσης που είναι τουλάχιστον 3 και επιτυγχάνεται από τον αλγόριθμο Σταθερών Αναθέσεων. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας συγκριτική ανάλυση για τον άπληστο αλγόριθμο, αποδεικνύουμε ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του είναι τουλάχιστο 2.429 και το πολύ 2.5. Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 2.

Για την on-line εκδοχή του προβλήματος ελέγχου κλήσεων, παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο  $p$ -RANDOM, έναν πιθανοτικό αλγόριθμο που χρησιμοποιεί τυχαιότητα κάθε φορά που εμφανίζεται μια αίτηση επικοινωνίας (δηλ. χρησιμοποιεί τυχαιότητα που είναι ανάλογη με το μέγεθος του δικτύου) σε ασύρματα δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2 που υποστηρίζουν μία συχνότητα. Αποδεικνύουμε ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσής του είναι μεταξύ 2,469 και 2,651 θεωρώντας αντιπάλους “χωρίς μνήμη”. Με τον τρόπο αυτό, καταρρίπτουμε το κάτω φράγμα με τιμή 3, που είναι ο ελάχιστος δυνατός συγκριτικός λόγος απόδοσης για ντετερμινιστικούς αλγόριθμους σε ασύρματα κυψελικά δίκτυα. Η ανάλυσή μας επεκτείνεται σε κυψελικά δίκτυα με γραφήματα παρεμβολής σταθερού ή και αυθαίρετου βαθμού. Στη συνέχεια, βελτιώνουμε σημαντικά αυτό τα παραπάνω αποτελέσματα παρουσιάζοντας μια σειρά απλών πιθανοτικών αλγορίθμων που έχουν συγκριτικούς λόγους απόδοσης μικρότερους από 3, δουλεύουν για δίκτυα που υποστηρίζουν αυθαίρετα πολλές συχνότητες, και χρησιμοποιούν μόνο σταθερό αριθμό τυχαίων δυαδικών ψηφίων ή μια συγκριτικά ασθενή πηγή τυχαιότητας. Το καλύτερο πάνω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης που πετυχαίνουμε είναι  $7/3$ .

Για κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k > 2$ , παρουσιάζουμε απλούς πιθανοτικούς on-line αλγόριθμους ελέγχου αποδοχής κλήσεων με συγκριτικούς λόγους απόδοσης που βελτιώνουν σημαντικά τα κάτω φράγματα για τους συγκριτικούς λόγους απόδοσης των ντετερμινιστικών αλγορίθμων και χρησιμοποιούν  $O(\log k)$  τυχαία δυαδικά ψηφία ή ασθενείς πηγές τυχαιότητας. Οι αλγόριθμοι αυτοί επιτυγχάνουν συγκριτικούς λόγους απόδοσης αρκετά καλύτερους από 4. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την Αρχή Minimax του Yao (Yao’s Minimax Principle) αποδεικνύουμε μια σειρά από κάτω φράγματα με τιμές  $13/7$ ,  $25/12$ , και  $127/60$  για κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k \geq 2$ ,  $k \geq 5$  και  $k \geq 12$ , αντίστοιχα και με τιμή 2.086 για δίκτυα



με επίπεδα γραφήματα παρεμβολών.

Τα αποτελέσματα σχετικά με το πρόβλημα του ελέγχου αποδοχής κλήσεων παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3. Στο Κεφάλαιο 4, μελετάμε τις on-line εκδοχές των δύο θεμελιωδών γραφοθεωρητικών προβλημάτων, της εύρεσης μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου και του ελάχιστου χρωματισμού γραφημάτων, για την περίπτωση γραφημάτων δίσκων, δηλαδή γραφημάτων που προκύπτουν από τις τομές δίσκων στο επίπεδο. Για το πρόβλημα εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων, εξετάζουμε το αν η χρήση τυχειότητας βοηθά στην βελτίωση του συγκριτικού λόγου απόδοσης on-line αλγορίθμων. Υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες των δίσκων επιλέγονται από αντιπάλους χωρίς μνήμη, δηλ., αντιπάλους που δε γνωρίζουν τις τυχαίες επιλογές των αλγορίθμων (αλλά ενδεχομένως γνωρίζουν την πιθανοτική κατανομή με βάση την οποία ο αλγόριθμος πραγματοποιεί τις τυχαίες επιλογές του). Αποδεικνύουμε ότι, γενικά, η χρήση τυχειότητας δε βοηθάει απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη ακόμα και στην περίπτωση που δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων, δηλ., κατασκευάζουμε ακολουθίες δίσκων για τις οποίες κανένας (ακόμα και πιθανοτικός) on-line αλγόριθμος δε μπορεί να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από  $\Omega(n)$ . Για την περίπτωση που δε δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων, αποδεικνύουμε ένα κάτω φράγμα  $\Omega(\min\{n, \sigma^2\})$  για το συγκριτικό λόγο απόδοσης on-line αλγορίθμων για  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων (δηλ. γραφήματα όπου οι κόμβοι αντιστοιχούν σε δίσκους με ακτίνες μεταξύ 1 και  $\sigma$ ) με  $n$  κορυφές που σημαίνει ότι ο αλγόριθμος First-Fit είναι βέλτιστος ως προς ένα μικρό σταθερό παράγοντα. Για την περίπτωση  $\sigma$ -φραγμένων γραφημάτων δίσκων όταν δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων, παρουσιάζουμε πιθανοτικούς αλγόριθμους με συγκριτικό λόγο απόδοσης σχεδόν λογαριθμικό ως προς  $\sigma$  και αποδεικνύουμε ότι οι αλγόριθμοι αυτοί είναι βέλτιστοι. Για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων (δηλ. δίσκων με την ίδια ακτίνα), παρουσιάζουμε έναν πιθανοτικό αλγόριθμο με συγκριτικό λόγο απόδοσης 4.41 (που είναι μικρότερος από το κάτω φράγμα με τιμή 5 για το συγκριτικό λόγο απόδοσης ντετερμινιστικών αλγορίθμων). Αποδεικνύουμε επίσης κάτω φράγματα με τιμές 2.5 και 3 για το συγκριτικό λόγο απόδοσης πιθανοτικών αλγορίθμων για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων. Για το πρόβλημα χρωματισμού, δείχνουμε πώς μπορεί να επιτευχθεί το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα  $O(\min\{\log n, \log \sigma\})$  για  $\sigma$ -φραγμένες ακολουθίες  $n$  δίσκων ακόμα κι αν δε δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων.

Συνοψίζουμε στο Κεφάλαιο 5 παραθέτοντας πιθανές κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα σχετικά με τα προβλήματα που μελετάμε.



## Κεφάλαιο 2

# Ανάθεση συχνοτήτων σε κυψελικά δίκτυα

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετάμε το πρόβλημα της ανάθεσης συχνοτήτων σε κυψελικά δίκτυα. Ασχολούμαστε με την on-line εκδοχή του προβλήματος.

Εύρεση λύσεων για την on-line εκδοχή του προβλήματος ανάθεσης συχνοτήτων σημαίνει το σχεδιασμό on-line πρωτοκόλλων για την ανάθεση συχνοτήτων στο δίκτυο ώστε να αποφεύγονται οι παρεμβολές δεδομένου ότι το πλήθος των κλήσεων ανά κυψέλη διαφοροποιείται με το πέρασμα του χρόνου.

Το πρόβλημα ανάθεσης συχνοτήτων στη στατική του μορφή συμπεριλαμβάνονται των περιορισμών για αποφυγή παρεμβολών μπορεί να εκφραστεί ως εξής. Έστω  $G = (V, E, w)$  ένα γράφημα παρεμβολών όπου κάθε κορυφή  $v \in V$  έχει ένα μη αρνητικό ακέραιο βάρος,  $w(v) \geq 0$ . Το γράφημα  $G$  μοντελοποιεί ένα στατικό στιγμιότυπο του δικτύου σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή, οι κορυφές του αναπαριστούν κυψέλες και τα βάρη αναπαριστούν τον αριθμό των κλήσεων σε κάθε κυψέλη που απαιτούν εξυπηρέτηση. Το πρόβλημα είναι ο κατάλληλος πολυχρωματισμός του γραφήματος  $G$ , δηλ., η ανάθεση  $w(v)$  διαφορετικών συχνοτήτων σε κάθε κορυφή  $v$  έτσι ώστε για κάθε ακμή,  $(u, v) \in E$ , τα σύνολα των χρωμάτων που ανατίθενται στα άκρα της  $u$  και  $v$ , να είναι ξένα μεταξύ τους. Κόστος του πολυχρωματισμού είναι ο συνολικός αριθμός των χρησιμοποιούμενων χρωμάτων. Συγκεκριμένα, στόχος είναι ένας κατάλληλος πολυχρωματισμός του γραφήματος  $G$  με εύρος ίσο με τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων που απαιτούνται για το χρωματισμό του  $G$ , και συμβολίζεται με  $\chi(G)$ . Στα πλαίσια του προβλήματος ανάθεσης συχνοτήτων, ένας πολυχρωματισμός όπως ορίστηκε παραπάνω, εκφράζει με περιεκτικό τρόπο την ουσία των αναγκαίων περιορισμών για αποφυγή παρεμβολών: κάθε χρώμα αναπαριστά μια διαφορετική συχνότητα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ίδια συχνότητα για δύο

κλήσεις αν και μόνον αν οι κλήσεις προέρχονται από διαφορετικές, αμοιβαία μη γειτονικές κυψέλες. Συνήθως, αντιστοιχούμε το διαθέσιμο σύνολο χρωμάτων στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Για την εκτίμηση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας της στατικής εκδοχής του προβλήματος ανάθεσης συχνοτήτων, ορίζουμε αρχικά το βάρος μιας μέγιστης κλίμακας στο γράφημα  $G$  σαν το άθροισμα των βαρών των κορυφών που ανήκουν στην κλίμακα. Προφανώς, ο  $\chi(G)$  θα είναι τουλάχιστον ίσος με το βάρος της μέγιστης κλίμακας στο γράφημα, αφού ο  $G$  είναι υπογράφημα του τριγωνικού πλέγματος, οι μόνες μέγιστες κλίμακες θα είναι ή απομονωμένες κορυφές, ή ακμές ή τρίγωνα.

Έχει αποδειχθεί ότι το πρόβλημα του βέλτιστου πολυχρωματισμού εξαγωνικών γραφημάτων είναι  $NP$ -δύσκολο [48]. Όσον αφορά στα άνω φράγματα, υπάρχει ευρεία σχετική βιβλιογραφία για αλγόριθμους ανάθεσης συχνοτήτων σύμφωνα με την οποία οι αλγόριθμοι στην πράξη χρησιμοποιούν λίγα χρώματα, αλλά δεν έχουν παρουσιαστεί τεκμηριωμένα φράγματα για την απόδοσή τους ([18], [40], [41], [53], [60]). Ένας πολύ γνωστός αλγόριθμος είναι ο αλγόριθμος Σταθερών Αναθέσεων, που βασίζεται στο ότι το υποκείμενο γράφημα μπορεί να χρωματιστεί με 3 χρώματα, και χρησιμοποιεί τρία προκαθορισμένα, ξένα μεταξύ τους, σύνολα χρωμάτων, ένα για κάθε βασικό χρώμα. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο, μια κορυφή με βασικό χρώμα 1 χρησιμοποιεί χρώματα από το πρώτο σύνολο, και μια κορυφή με βασικό χρώμα 2 ή 3 χρησιμοποιεί χρώματα από το δεύτερο ή το τρίτο σύνολο, αντίστοιχα. Ο αλγόριθμος Σταθερών Αναθέσεων είναι ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης 3. Οι Janssen και άλλοι στην εργασία [37] προτείνουν τον αλγόριθμο Αναθέσεων Σταθερής Προτίμησης που δε χρησιμοποιεί παραπάνω από  $\frac{3}{2}$  φορές τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό χρωμάτων. Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι με λόγο προσέγγισης  $\frac{4}{3}$  έχουν παρουσιαστεί στις εργασίες [48] και [49]. Στην on-line εκδοχή του προβλήματος ανάθεσης συχνοτήτων, τα βάρη των κόμβων μεταβάλλονται (αυξάνονται) με το χρόνο. Οι μεταβολές αυτές μοντελοποιούνται σαν μια ακολουθία γραφημάτων παρεμβολών,  $G_t = (V, E, w_t) : t \geq 0$ , όπου  $w_t$  είναι το σύνολο των κλήσεων που πρέπει να εξυπηρετηθούν τη χρονική στιγμή  $t$ . Τη χρονική στιγμή  $t$ , ένας on-line αλγόριθμος πρέπει να αποφασίσει πώς θα χρωματίσει το γράφημα  $G_t$  πριν προχωρήσει στο γράφημα  $G_{t+1}$  τη χρονική στιγμή  $t + 1$ . Ο χρωματισμός πρέπει να γίνει χωρίς γνώση των επόμενων γραφημάτων της ακολουθίας.

Υπάρχει σημαντική βιβλιογραφία σχετικά με την on-line εκδοχή του προβλήματος χρωματισμού γραφημάτων (π.χ., εργασίες [57], [43], [35]), σύμφωνα με την οποία οι κορυφές του γραφήματος που πρέπει να χρωματιστεί εμφανίζονται μία μία ανά χρονικό βήμα, και ο αλγόριθμος πρέπει να αναθέσει ένα χρώμα σε κάθε μία από αυτές.

Η στατική εκδοχή του προβλήματος σε κυψελικά δίκτυα έχει μελετηθεί στις εργασίες [49] και [48], ενώ η εργασία [38] πραγματεύεται την on-line εκ-

δοχή του προβλήματος. Οι Janssen και άλλοι [38] χρησιμοποιούν συγκριτική ανάλυση για να εκτιμήσουν την απόδοση αρκετών αλγορίθμων κατανομής συχνοτήτων και αποδεικνύουν κάτω φράγματα. Μεταξύ άλλων αποτελεσμάτων, αποδεικνύουν ότι κανένας on-line ντετερμινιστικός αλγόριθμος κατανομής συχνοτήτων δε μπορεί να πετύχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από 2 ενώ αναφέρουν τον κλασσικό αλγόριθμο Σταθερών Αναθέσεων που έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης 3.

Στο κεφάλαιο αυτό, βελτιώνουμε αυτόν το συγκριτικό λόγο απόδοσης παρουσιάζοντας μια αυστηρή συγκριτική ανάλυση για τον άπληστο (greedy) αλγόριθμο κατανομής συχνοτήτων (Ενότητα 2.2). Ειδικότερα, αποδεικνύουμε ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσής του είναι μεταξύ των 2.429 και 2.5. Ένα πρόσφατο καλύτερο κάτω φράγμα που αποδεικνύεται στην εργασία [50] δείχνει ότι η ανάλυση του άπληστου αλγορίθμου που παρουσιάζουμε είναι αυστηρή.

## 2.1 Ο άπληστος αλγόριθμος ανάθεσης συχνοτήτων

Ο αλγόριθμος Σταθερών Αναθέσεων [38] χρησιμοποιεί το γεγονός ότι το γράφημα παρεμβολών ενός κυψελικού δικτύου μπορεί να χρωματιστεί με τρία χρώματα τα οποία ονομάζουμε χρώματα βάσης. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τρία σταθερά σύνολα συχνοτήτων, ένα για κάθε χρώμα βάσης. Μια κυψέλη που έχει χρώμα βάσης 1 χρησιμοποιεί συχνότητες από το πρώτο σύνολο για τις κλήσεις που εμφανίζονται σε αυτή ενώ μια κυψέλη με χρώμα βάσης 2 ή 3 χρησιμοποιεί συχνότητες από το δεύτερο ή το τρίτο σύνολο αντίστοιχα. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος Σταθερών Αναθέσεων χρησιμοποιεί το πολύ τριπλάσιες συχνότητες από αυτές που θα χρησιμοποιούσε ο βέλτιστος off-line αλγόριθμος.

Ο άπληστος αλγόριθμος, που περιγράφεται στη συνέχεια, είναι ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος για on-line ανάθεση συχνοτήτων. Σύμφωνα με τον άπληστο αλγόριθμο, οι συχνότητες αντιστοιχούν σε θετικούς ακέραιους  $1, 2, \dots$ . Όταν εμφανίζεται μια καινούρια κλήση, ανατίθεται σε αυτή η μικρότερη διαθέσιμη συχνότητα έτσι ώστε να μην υπάρχουν παρεμβολές με κλήσεις της ίδιας η γειτονικών κυψελών, δηλαδή η συχνότητα αυτή να μην έχει ανατεθεί σε κλήσεις της ίδιας ή γειτονικών κυψελών. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια σχεδόν αυστηρή συγκριτική ανάλυση του άπληστου αλγορίθμου.

## 2.2 Ανάλυση της απόδοσης του άπληστου αλγόριθμου

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε ένα άνω φράγμα για την απόδοση του άπληστου αλγορίθμου ανάθεσης συχνοτήτων. Συγκεκριμένα:

**Θεώρημα 1.** *Ο άπληστος αλγόριθμος κατανομής συχνοτήτων έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ 2.5 απέναντι σε off-line αντιπάλους όταν εκτελείται για κυψελικά δίκτυα.*

*Απόδειξη.* Έστω  $\sigma$  μια ακολουθία κλήσεων που παρουσιάζεται σε ένα κυψελικό δίκτυο και έστω  $D$  ο μέγιστος αριθμός κλήσεων σε κάθε τριάδα αμοιβαία γειτονικών κυψελών του δικτύου. Προφανώς, ο  $D$  είναι αποτελεί ένα κάτω φράγμα για τον αριθμό των συχνοτήτων που απαιτούνται για μια βέλτιστη ανάθεση συχνοτήτων στην ακολουθία  $\sigma$ .

Θεωρούμε ότι ο άπληστος αλγόριθμος εκτελείται για την ακολουθία κλήσεων  $\sigma$ , και έστω  $c_0$  η κυψέλη που περιέχει την κλήση στην οποία ανατέθηκε η υψηλότερη συχνότητα  $a_0$ . Θα αποδείξουμε ότι  $a_0 \leq 2.5D$ , δηλαδή ότι ο άπληστος αλγόριθμος είναι το πολύ 2.5-ανταγωνιστικός σε σχέση με έναν off-line αντίπαλο.

Συμβολίζουμε με  $x_0$  τον αριθμό των κλήσεων στην κυψέλη  $c_0$ . Από τον ορισμό του άπληστου αλγορίθμου, αφού η συχνότητα  $a_0$  έχει ανατεθεί σε μια κλήση της κυψέλης  $c_0$ , οι συχνότητες  $1, \dots, a_0 - 1$  πρέπει επίσης να έχουν ανατεθεί σε κλήσεις της κυψέλης  $c_0$  και των γειτονικών της κυψελών. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός αυτών των κλήσεων είναι το πολύ  $3D - 2x_0$ . Επομένως, έχουμε τον ακόλουθο περιορισμό για την  $x_0$ .

$$x_0 \leq \frac{3D - a_0}{2} \quad (2.1)$$

Συμβολίζουμε τις έξι κυψέλες που περιβάλλουν τη  $c_0$ ,  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ , έτσι ώστε για την αντίστοιχη μεγαλύτερη συχνότητα  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  που έχει ανατεθεί σε κλήσεις αυτών των κυψελών, να ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$a_0 > a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6$$

Συμβολίζουμε επίσης με  $y_i(j)$ , για  $0 \leq i \neq j \leq 6$ , τον αριθμό των κλήσεων στην κυψέλη  $c_j$  στις οποίες έχουν ανατεθεί συχνότητες μεγαλύτερες από την  $a_i$ . Προφανώς, είναι  $y_i(j) \leq x_j$ , για  $0 \leq i \neq j \leq 6$ .

Θεωρούμε τη συχνότητα  $a_1$  που έχει ανατεθεί σε κάποια κλήση της κυψέλης  $c_1$ . Είναι  $a_1 = a_0 - y_1(0)$ . Επιπλέον, η τιμή  $a_1$  φράσσεται άνω από τον αριθμό των κλήσεων στην  $c_1$  και τις γειτονικές της κυψέλες, μειωμένο κατά τις  $y_1(0)$

κλήσεις της  $c_0$  (στις οποίες έχουν ανατεθεί συχνότητες μεγαλύτερες από την  $a_1$ ). Καταλήγουμε στο ότι

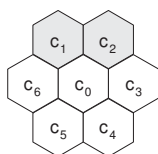
$$x_1 \leq \frac{3D - a_0}{2} \quad (2.2)$$

Για τη συχνότητα  $a_2$  που έχει ανατεθεί σε κάποια κλήση της κυψέλης  $c_2$ , είναι

$$a_2 \geq a_0 - y_2(0) - y_2(1) \quad (2.3)$$

Διακρίνουμε, τώρα, μεταξύ δύο βασικών περιπτώσεων.

**ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ I:** Η κυψέλη  $c_2$  είναι γειτονική με την  $c_1$ .



Σχήμα 2.1: Η Περίπτωση I

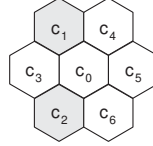
Στην περίπτωση αυτή, η τιμή  $a_2$  φράσσεται άνω από τον αριθμό των κλήσεων στην  $c_2$  και στις γειτονικές της κυψέλες, μειωμένο κατά τις  $y_2(0)$  κλήσεις της  $c_0$  και τις  $y_2(1)$  κλήσεις της  $c_1$  (στις οποίες έχουν ανατεθεί συχνότητες μεγαλύτερες από την  $a_2$ ). Ο αριθμός των κλήσεων στην  $c_2$  και στις γειτονικές της κυψέλες είναι το πολύ  $2D - x_2 + x_0 + x_1$ . Χρησιμοποιώντας την (2.3), παίρνουμε ότι

$$x_2 \leq 2D + x_0 + x_1 - a_0 \quad (2.4)$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των κλήσεων στην  $c_0$  και στις γειτονικές της κυψέλες, που αποτελεί ένα άνω φράγμα για την  $a_0$ , είναι το πολύ  $2D - x_0 + x_1 + x_2$ . Χρησιμοποιώντας τις (2.2) και (2.4), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} a_0 &\leq 2D - x_0 + x_1 + x_2 \\ &\leq 4D + 2x_1 - a_0 \\ &\leq 7D - 2a_0 \Rightarrow \\ a_0 &\leq \frac{7D}{3} < \frac{5D}{2}. \end{aligned}$$

**ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ II:** Η κυψέλη  $c_2$  δεν είναι γειτονική με την  $c_1$ .



Σχήμα 2.2: Η Περίπτωση II

Στην περίπτωση αυτή, η τιμή  $a_2$  φράσσεται άνω από τον αριθμό των κλήσεων στην κυψέλη  $c_2$  και στις γειτονικές της κυψέλες, μειωμένο κατά τις  $y_2(0)$  κλήσεις της κυψέλης  $c_0$  (στις οποίες έχουν ανατεθεί συχνότητες μεγαλύτερες από την  $a_2$ ). Ο αριθμός των κλήσεων στην κυψέλη  $c_2$  και στις γειτονικές της κυψέλες είναι το πολύ  $3D - 2x_2$ . Χρησιμοποιώντας την (2.3), παίρνουμε ότι

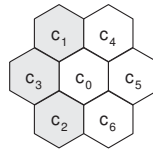
$$x_2 \leq \frac{3D - a_0 + y_2(1)}{2} \quad (2.5)$$

Για τη συχνότητα  $a_3$  που έχει ανατεθεί σε κάποια κλήση  $c_3$ , ισχύει ότι

$$a_3 \geq a_0 - y_3(0) - y_3(1) - y_3(2) \quad (2.6)$$

Διακρίνουμε τώρα μεταξύ των επόμενων τριών περιπτώσεων.

**ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Π.1:** Η κυψέλη  $c_3$  είναι γειτονική με την  $c_1$  (και πιθανώς με τη  $c_2$ ).



Σχήμα 2.3: Η Περίπτωση Π.1

Στην περίπτωση αυτή, η τιμή  $a_3$  φράσσεται άνω από τον αριθμό των κλήσεων στην  $c_3$  και στις γειτονικές της κυψέλες, μειωμένο κατά τις  $y_3(0)$  κλήσεις στην κυψέλη  $c_0$  και τις  $y_3(1)$  κλήσεις στην κυψέλη  $c_1$  (στις οποίες έχουν ανατεθεί συχνότητες μεγαλύτερες από την  $a_3$ ). Ο αριθμός των κλήσεων στην κυψέλη  $c_3$  και στις γειτονικές της κυψέλες είναι το πολύ  $2D - x_3 + x_0 + x_1$ . Χρησιμοποιώντας την (2.6), παίρνουμε ότι

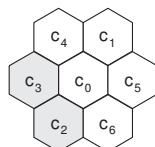
$$x_3 \leq 2D + x_0 + x_1 + y_3(2) - a_0 \quad (2.7)$$



Σημειώνουμε ότι ο αριθμός των κλήσεων στην κυψέλη  $c_0$  και στις γειτονικές της κυψέλες, ο οποίος αποτελεί ένα άνω φράγμα για την τιμή  $a_0$ , είναι το πολύ  $2D - x_0 + x_1 + x_3$ . Χρησιμοποιώντας τις (2.2), (2.5), (2.7), και το γεγονός ότι  $y_3(2) \leq x_2$  και  $y_2(1) \leq x_1$ , παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
a_0 &\leq 2D - x_0 + x_1 + x_3 \\
&\leq 4D + 2x_1 + y_3(2) - a_0 \\
&\leq 4D + 2x_1 + x_2 - a_0 \\
&\leq \frac{11D}{2} + 2x_1 + \frac{y_2(1)}{2} - \frac{3a_0}{2} \\
&\leq \frac{11D}{2} + \frac{5x_1}{2} - \frac{3a_0}{2} \\
&\leq \frac{37D}{4} - \frac{11a_0}{4} \Rightarrow \\
a_0 &\leq \frac{37D}{15} < \frac{5D}{2}.
\end{aligned}$$

**ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ II.2:** Η κυψέλη  $c_3$  είναι γειτονική με την κυψέλη  $c_2$  (αλλά όχι με την  $c_1$ ).



Σχήμα 2.4: Η Περίπτωση II.2

Στην περίπτωση αυτή, η τιμή  $a_3$  φράσσεται άνω από τον αριθμό των κλήσεων στην κυψέλη  $c_3$  και στις γειτονικές της κυψέλες, μειωμένο κατά τις  $y_3(0)$  κλήσεις στην κυψέλη  $c_0$  και τις  $y_3(2)$  κλήσεις στην κυψέλη  $c_2$  (στις οποίες έχουν ανατεθεί συχνότητες μεγαλύτερες  $a_3$ ). Ο αριθμός των κλήσεων στην κυψέλη  $c_3$  και στις γειτονικές της κυψέλες είναι το πολύ  $2D - x_3 + x_0 + x_2$ . Χρησιμοποιώντας την (2.6), παίρνουμε ότι

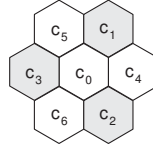
$$x_3 \leq 2D + x_0 + x_2 + y_3(1) - a_0 \quad (2.8)$$

Σημειώνουμε ότι ο αριθμός των κλήσεων στην κυψέλη  $c_0$  και στις γειτονικές της κυψέλες, ο οποίος αποτελεί ένα άνω φράγμα για την τιμή  $a_0$ , είναι το πολύ  $2D - x_0 + x_2 + x_3$ . Χρησιμοποιώντας τις (2.2), (2.5), (2.8), και το γεγονός ότι

ότι  $y_3(1) \leq x_1$  και  $y_2(1) \leq x_1$ , παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
a_0 &\leq 2D - x_0 + x_2 + x_3 \\
&\leq 4D + 2x_2 + y_3(1) - a_0 \\
&\leq 4D + x_1 + 2x_2 - a_0 \\
&\leq 7D + x_1 + y_2(1) - 2a_0 \\
&\leq 7D + 2x_1 - 2a_0 \\
&\leq 10D - 3a_0 \Rightarrow \\
a_0 &\leq \frac{5D}{2}.
\end{aligned}$$

**ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Π.3:** Η κυψέλη  $c_3$  δεν είναι γειτονική με τις κυψέλες  $c_1$  και  $c_2$ .



Σχήμα 2.5: Η Περίπτωση Π.3

Στην περίπτωση αυτή, η τιμή  $a_3$  φράσσεται άνω από τον αριθμό των κλήσεων στην κυψέλη  $c_3$  και στις γειτονικές της κυψέλες, μειωμένο κατά τις  $y_3(0)$  κλήσεις στην κυψέλη  $c_0$  (στις οποίες έχουν ανατεθεί συχνότητες μεγαλύτερες από την  $a_3$ ). Ο αριθμός των κλήσεων στην κυψέλη  $c_3$  και στις γειτονικές της κυψέλες είναι το πολύ  $3D - 2x_3$ . Χρησιμοποιώντας την (2.6), παίρνουμε ότι

$$x_3 \leq \frac{3D - a_0 + y_3(1) + y_3(2)}{2} \quad (2.9)$$

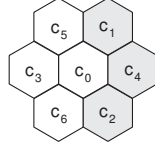
Για τη συχνότητα  $a_4$  που έχει ανατεθεί σε κάποια κλήση  $c_4$ , ισχύει

$$a_4 \geq a_0 - y_4(0) - y_4(1) - y_4(2) - y_4(3) \quad (2.10)$$

Πάλι, διακρίνουμε μεταξύ των ακόλουθων τριών υποπεριπτώσεων.

**ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Π.3.α:** Η κυψέλη  $c_4$  είναι γειτονική με τις κυψέλες  $c_1$  και  $c_2$ .

Στην περίπτωση αυτή, η τιμή  $a_4$  φράσσεται άνω από τον αριθμό των κλήσεων στην κυψέλη  $c_4$  και στις γειτονικές της κυψέλες, μειωμένο κατά τις  $y_4(0)$  κλήσεις στην κυψέλη  $c_0$ , τις  $y_4(1)$  κλήσεις στην κυψέλη  $c_1$ , και τις  $y_4(2)$  κλήσεις



Σχήμα 2.6: Η Περίπτωση II.3.α

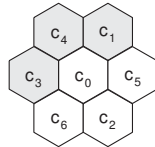
στην κυψέλη  $c_2$  (στις οποίες έχουν ανατεθεί συχνότητες μεγαλύτερες από την  $a_4$ ). Ο αριθμός των κλήσεων στην κυψέλη  $c_4$  και στις γειτονικές της κυψέλες είναι το πολύ  $2D - x_4 + x_0 + x_1$ . Χρησιμοποιώντας την (2.10), παίρνουμε ότι

$$x_4 \leq 2D + x_0 + x_1 + y_4(3) - a_0 \quad (2.11)$$

Σημειώνουμε ότι ο αριθμός των κλήσεων στις κυψέλες  $c_5$  και  $c_6$  που είναι γειτονικές με τη  $c_3$  είναι  $x_5, x_6 \leq D - x_0 - x_3$ . Επομένως, ο αριθμός των κλήσεων στην κυψέλη  $c_0$  και στις γειτονικές της κυψέλες, που αποτελεί ένα άνω φράγμα γι την τιμή  $a_0$ , είναι το πολύ  $2D - x_0 - x_3 + x_1 + x_2 + x_4$ . Χρησιμοποιώντας τις (2.2), (2.5), (2.9), (2.11), και το γεγονός ότι  $y_4(3) \leq x_3$  και  $y_2(1) \leq x_1$ , παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} a_0 &\leq 2D - x_0 - x_3 + x_1 + x_2 + x_4 \\ &\leq 4D - x_3 + 2x_1 + x_2 + y_4(3) - a_0 \\ &\leq \frac{11D}{2} + 2x_1 + \frac{y_2(1)}{2} - \frac{3a_0}{2} \\ &\leq \frac{11D}{2} + \frac{5x_1}{2} - \frac{3a_0}{2} \\ &\leq \frac{37D}{4} - \frac{11a_0}{4} \Rightarrow \\ a_0 &\leq \frac{37D}{15} < \frac{5D}{2}. \end{aligned}$$

**ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ II.3.β:** Η κυψέλη  $c_4$  είναι γειτονική με τις κυψέλες  $c_1$  και  $c_3$ .



Σχήμα 2.7: Η Περίπτωση II.3.β

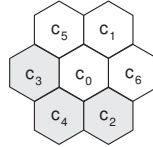
Στην περίπτωση αυτή, η τιμή  $a_4$  φράσσεται άνω από τον αριθμό των κλήσεων στην κυψέλη  $c_4$  και στις γειτονικές της κυψέλες, μειωμένο κατά τις  $y_4(0)$  κλήσεις στην κυψέλη  $c_0$ , τις  $y_4(1)$  κλήσεις στην κυψέλη  $c_1$ , και τις  $y_4(3)$  κλήσεις στην κυψέλη  $c_3$  (στις οποίες έχουν ανατεθεί συχνότητες μεγαλύτερες από την  $a_4$ ). Ο αριθμός των κλήσεων στην κυψέλη  $c_4$  και στις γειτονικές της κυψέλες είναι το πολύ  $2D - x_4 + x_0 + x_1$ . Χρησιμοποιώντας την (2.10), παίρνουμε ότι

$$x_4 \leq 2D + x_0 + x_1 + y_4(2) - a_0 \quad (2.12)$$

Σημειώνουμε ότι ο αριθμός των κλήσεων στην κυψέλη  $c_0$  και στις γειτονικές της κυψέλες, που αποτελεί ένα άνω φράγμα για την τιμή  $a_0$ , είναι το πολύ  $2D - x_0 + x_1 + x_4$ . Χρησιμοποιώντας τις (2.2), (2.5), (2.9), (2.12), και το γεγονός ότι  $y_4(2) \leq x_2$  και  $y_2(1) \leq x_1$ , παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} a_0 &\leq 2D - x_0 + x_1 + x_4 \\ &\leq 4D + 2x_1 + y_4(2) - a_0 \\ &\leq 4D + 2x_1 + x_2 - a_0 \\ &\leq \frac{11D}{2} + 2x_1 + \frac{y_2(1)}{2} - \frac{3a_0}{2} \\ &\leq \frac{11D}{2} + \frac{5x_1}{2} - \frac{3a_0}{2} \\ &\leq \frac{37D}{4} - \frac{11a_0}{4} \Rightarrow \\ a_0 &\leq \frac{37D}{15} < \frac{5D}{2}. \end{aligned}$$

**ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Π.3.γ:** Η κυψέλη  $c_4$  είναι γειτονική με τις κυψέλες  $c_2$  και  $c_3$ .



Σχήμα 2.8: Η Περίπτωση Π.3.γ

Στην περίπτωση αυτή, η τιμή  $a_4$  φράσσεται άνω από τον αριθμό των κλήσεων στην κυψέλη  $c_4$  και στις γειτονικές της κυψέλες, μειωμένο κατά τις  $y_4(0)$  κλήσεις στην κυψέλη  $c_0$ , τις  $y_4(2)$  κλήσεις στην κυψέλη  $c_2$ , και τις  $y_4(3)$  κλήσεις στην κυψέλη  $c_3$  (στις οποίες έχουν ανατεθεί συχνότητες μεγαλύτερες από την

$a_4$ ). Ο αριθμός των κλήσεων στην κυψέλη  $c_4$  και στις γειτονικές της κυψέλες είναι το πολύ  $2D - x_4 + x_0 + x_2$ . Χρησιμοποιώντας την (2.10), παίρνουμε ότι

$$x_4 \leq 2D + x_0 + x_2 + y_4(1) - a_0 \quad (2.13)$$

Σημειώνουμε ότι ο αριθμός των κλήσεων στις κυψέλες  $c_0$  και στις γειτονικές της κυψέλες, που αποτελεί ένα άνω φράγμα για την τιμή  $a_0$ , είναι το πολύ  $2D - x_0 + x_2 + x_4$ . Χρησιμοποιώντας τις (2.2), (2.5), (2.9), (2.13), και το γεγονός ότι  $y_4(1) \leq x_1$  και  $y_2(1) \leq x_1$ , παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} a_0 &\leq 2D - x_0 + x_2 + x_4 \\ &\leq 4D + 2x_2 + y_4(1) - a_0 \\ &\leq 4D + x_1 + 2x_2 - a_0 \\ &\leq 7D + x_1 + y_2(1) - 2a_0 \\ &\leq 7D + 2x_1 - 2a_0 \\ &\leq 10D - 3a_0 \Rightarrow \\ a_0 &\leq \frac{5D}{2}. \end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση, είναι  $a_0 \leq 2.5D$ . Και ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος.  $\square$

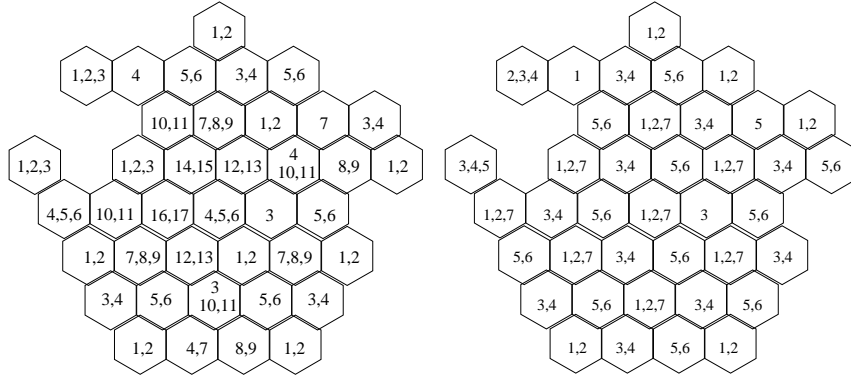
## 2.3 Κάτω φράγμα για την απόδοση του άπληστου αλγορίθμου

Στη συνέχεια δίνουμε ένα κάτω φράγμα για την απόδοση του άπληστου αλγορίθμου. Συγκεκριμένα:

**Θεώρημα 2.** *Ο άπληστος αλγόριθμος έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης τουλάχιστο 2.429 απέναντι σε έναν off-line αντίπαλο, όταν εφαρμόζεται σε κυψελικά δίκτυα.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε ένα κυψελικό δίκτυο και μια ακολουθία κλήσεων  $\sigma'$  που φαίνεται στο αριστερό μέρος του σχήματος 2.9. Στις κλήσεις που εμφανίζονται στο βήμα 1 ανατίθεται η συχνότητα 1. Σε κάθε ένα από τα ακόλουθα βήματα  $2 \leq i \leq 17$ , ο άπληστος αλγόριθμος αναθέτει σε όλες τις κλήσεις που εμφανίζονται στο βήμα  $i$  τη συχνότητα  $i$ , αφού οι συχνότητες  $1, 2, \dots, i - 1$  χρησιμοποιούνται ήδη από κλήσεις στην ίδια ή σε γειτονικές κυψέλες.

Όταν εκτελεστεί για την ακολουθία  $\sigma'$ , ο άπληστος αλγόριθμος χρησιμοποιεί 17 συχνότητες ενώ μια βέλτιστη ανάθεση συχνοτήτων για τη  $\sigma'$  με 7



Σχήμα 2.9: Το κάτω φράγμα στην απόδοση του άπληστου αλγορίθμου. Αριστερά, οι ακέραιοι αντιστοιχούν στο βήμα κατά το οποίο εμφανίζονται οι κλήσεις. Δεξιά παρουσιάζεται μια βέλτιστη ανάθεση συχνοτήτων.

συχνότητες παρουσιάζεται στο δεξιό μέρος του σχήματος 2.9. Επομένως, ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του άπληστου αλγορίθμου είναι:

$$\rho = \max_{\sigma} \frac{C_A(\sigma)}{C_{OPT}(\sigma)} \geq \frac{C_A(\sigma')}{C_{OPT}(\sigma')} = \frac{17}{7} \approx 2.429.$$

□

Σε πρόσφατη εργασία [50] οι Narayanan και Tang βελτιώνουν το κάτω φράγμα για την απόδοση του άπληστου αλγορίθμου σε 2.5, που υπονοεί ότι η απόδειξη που παρουσιάσαμε στην ενότητα 2.2 είναι αυστηρή.

## Κεφάλαιο 3

# Έλεγχος αποδοχής κλήσεων σε ασύρματα δίκτυα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε το πρόβλημα αποδοχής κλήσεων που ορίζεται ως εξής: δεδομένων χρηστών που επιθυμούν να επικοινωνήσουν με τους σταθμούς βάσης τους, το πρόβλημα αποδοχής κλήσεων σε ένα δίκτυο που υποστηρίζει ένα φάσμα  $w$  διαθέσιμων συχνοτήτων συνίσταται στην ανάθεση των συχνοτήτων στους χρήστες έτσι ώστε το πολύ  $w$  συχνότητες να χρησιμοποιούνται συνολικά, να αποφεύγονται οι παρεμβολές, και ο αριθμός των εξυπηρετούμενων χρηστών να μεγιστοποιείται.

Θεωρούμε ότι οι κλήσεις που αντιστοιχούν σε χρήστες που επιθυμούν να επικοινωνήσουν εμφανίζονται στις κυψέλες του δικτύου με on-line τρόπο. Όταν φτάνει μια κλήση, ένας αλγόριθμος αποδοχής κλήσεων αποφασίζει είτε να αποδεχτεί την κλήση (αναθέτοντας μια συχνότητα σε αυτή), είτε να την απορρίψει. Από τη στιγμή που μια κλήση έχει γίνει αποδεκτή, δε μπορεί να απορριφθεί (preempted). Επιπλέον, η συχνότητα που ανατέθηκε στην κλήση δε μπορεί να τροποποιηθεί στο μέλλον. Θεωρούμε ότι όλες οι κλήσεις έχουν άπειρη διάρκεια, υπόθεση που είναι ισοδύναμη με τη θεώρηση κλήσεων ίδιας διάρκειας.

Η στατική εκδοχή του προβλήματος είναι παρόμοια με το γνωστό πρόβλημα της εύρεσης του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου. Η on-line εκδοχή του προβλήματος έχει μελετηθεί στις εργασίες [2, 3, 8, 15, 42, 52]. Στις εργασίες [2], [3], και [42] έχει μελετηθεί το πρόβλημα αποδοχής κλήσεων στα πλαίσια των οπτικών δικτύων. Οι Pantziou και άλλοι στην εργασία [52] παρουσιάζουν άνω φράγματα για δίκτυα με επίπεδα και αυθαίρετα γραφήματα παρεμβολών. Συνήθως, η συγκριτική ανάλυση αλγορίθμων αποδοχής κλήσεων γίνεται για δίκτυα που υποστηρίζουν μια συχνότητα. Οι Awerbuch και άλλοι στην εργα-

σία [2] παρουσιάζουν έναν απλό τρόπο για τη μετατροπή αλγορίθμων που είναι σχεδιασμένοι για δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα σε αλγορίθμους για δίκτυα που υποστηρίζουν αυθαίρετα πολλές συχνότητες με μικρή επιβάρυνση στη συγκριτική απόδοση (δείτε επίσης την εργασία [21, 59]). Κάτω φράγματα για αποδοχή κλήσεων σε αυθαίρετα δίκτυα παρουσιάζονται στην εργασία [8].

Ο άπληστος αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων είναι μάλλον ο απλούστερος on-line αλγόριθμος. Όταν εμφανίζεται μια κλήση, ο άπληστος αλγόριθμος αναζητά την πρώτη διαθέσιμη συχνότητα. Αν υπάρχει μια τέτοια συχνότητα, ο αλγόριθμος αποδέχεται την κλήση αναθέτοντάς της τη συχνότητα αυτή, διαφορετικά, η κλήση απορρίπτεται. Γενικά, οι Pantziou και άλλοι στην εργασία [52] δείχνουν ότι αυτός ο αλγόριθμος έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ ίσο με το βαθμό του γραφήματος παρεμβολών και είναι βέλτιστος στην κλάση των ντετερμινιστικών on-line αλγορίθμων αποδοχής κλήσεων.

Απλοί πιθανοτικοί αλγόριθμοι μπορούν να οριστούν χρησιμοποιώντας το παράδειγμα “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής” [2, 3, 52]. Τέτοιοι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν έναν χρωματισμό του υποκείμενου γραφήματος παρεμβολών, επιλέγουν τυχαία ένα χρώμα από αυτά που χρησιμοποιούνται, και εκτελούν τον άπληστο αλγόριθμο για τις κυψέλες που είναι χρωματισμένες με το χρώμα που επιλέχθηκε, αγνοώντας (δηλ., απορρίπτοντας) κλήσεις σε όλες τις άλλες κυψέλες. Ο συγκριτικός λόγος απόδοσης που επιτυγχάνεται με αυτό τον τρόπο, απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη, ισούται με τον αριθμό των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται για το χρωματισμό του γραφήματος παρεμβολών.

Εκτενέστερη αναφορά τόσο στον άπληστο αλγόριθμο ελέγχου αποδοχής κλήσεων όσο και στο παράδειγμα “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής” βρίσκεται στην Ενότητα 3.1.

Για κυβελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2, ο άπληστος αλγόριθμος έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης 3 απέναντι σε off-line αντιπάλους, στην περίπτωση δικτύων που υποστηρίζουν μια συχνότητα. Ελαφρώς χειρότερα φράγματα για τη συγκριτική απόδοση μπορούν να αποδειχθούν για την περίπτωση δικτύων που υποστηρίζουν αυθαίρετα πολλές συχνότητες χρησιμοποιώντας τις τεχνικές των εργασιών [2, 21, 59]. Στην εργασία [15], χρησιμοποιώντας παραπλήσια επιχειρήματα με αυτά της εργασίας [52], παρατηρήθηκε ότι κανένας ντετερμινιστικός on-line αλγόριθμος αποδοχής κλήσεων σε κυβελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2 δε μπορεί να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από 3 απέναντι σε off-line αντιπάλους. Εφαρμόζοντας το παράδειγμα “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής” και χρησιμοποιώντας έναν χρωματισμό του γραφήματος παρεμβολών με 3 χρώματα, παίρνουμε έναν πιθανοτικό αλγόριθμο με συγκριτικό λόγο απόδοσης 3 ακόμα και στην περίπτωση δικτύων που υποστηρίζουν αυθαίρετα πολλές συχνότητες. Πλεονέκτημα του αλγορίθμου αυτού είναι ότι χρησιμοποιεί μια πολύ ασθενή πηγή τυχειότητας για να



επιλέξει ισοπίθανα ένα από τρία διακριτά αντικείμενα.

Για την on-line εκδοχή του προβλήματος ελέγχου κλήσεων, περιγράφουμε τον αλγόριθμο  $p$ -RANDOM (Ενότητα 3.2), έναν διαισθητικό on-line πιθανοτικό αλγόριθμο ελέγχου κλήσεων για δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα [12]. Παρουσιάζουμε άνω και κάτω φράγματα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης του σε συναρτήσεις της παραμέτρου  $p$ , θεωρώντας αντιπάλους “χωρίς μνήμη”. Βελτιστοποιώντας τη συνάρτηση του άνω φράγματος, αποδεικνύουμε την ύπαρξη πιθανοτικού αλγορίθμου ελέγχου κλήσεων με συγκριτικό λόγο απόδοσης 2.651. Με τον τρόπο αυτό, καταρρίπτουμε το κάτω φράγμα με τιμή 3, που είναι ο ελάχιστος δυνατός συγκριτικός λόγος απόδοσης για ντετερμινιστικούς αλγόριθμους σε ασύρματα κυψελικά δίκτυα.

Τα παραπάνω αποτελέσματά μας [12, 13] ισχύουν μόνο για δίκτυα με μία συχνότητα αλλά αποδεικνύουν σαφώς ότι η τυχαιότητα βοηθά στη βελτίωση των άνω φραγμάτων των ντετερμινιστικών αλγορίθμων.

Στην Ενότητα 3.3, δίνουμε νέα φράγματα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM για αραιά ασύρματα κυψελικά δίκτυα, δηλαδή, ασύρματα κυψελικά δίκτυα με μικρό βαθμό, των οποίων οι κυψέλες έχουν ενδεχομένως ακανόνιστο σχήμα. Ασχολούμαστε με δίκτυα βαθμού τρία και τέσσερα. Για τα μεν πρώτα, αποδεικνύουμε ότι για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου  $p$ , ο αλγόριθμος  $p$ -RANDOM έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $9/4$  για δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα και 2.787 για δίκτυα που υποστηρίζουν πολλές συχνότητες. Παρουσιάζουμε επίσης σχετική απόδειξη για δίκτυα βαθμού τέσσερα, για τα οποία μπορούμε να επιτύχουμε συγκριτικό λόγο απόδοσης 2.651 και 3.182 για δίκτυα που υποστηρίζουν μία και πολλές συχνότητες, αντίστοιχα. Παρατηρούμε, ότι αυτό συμπίπτει με το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα για ιδεατά ασύρματα κυψελικά δίκτυα που προαναφέρθηκε [13].

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με την on-line εκδοχή του προβλήματος ελέγχου αποδοχής κλήσεων σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k > 2$ . Ο άπληστος αλγόριθμος έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης 4 και 5 σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k \in \{3, 4, 5\}$  και  $k \geq 6$ , αντίστοιχα, που υποστηρίζουν μία συχνότητα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η αποδοχή μιας μη βέλτιστης κλήσης μπορεί να προκαλέσει την απόρριψη το πολύ 4 και 5 βέλτιστων κλήσεων, αντίστοιχα. Αυτοί οι συγκριτικοί λόγοι απόδοσης είναι οι καλύτεροι δυνατοί που μπορούν να επιτευχθούν από ντετερμινιστικούς αλγόριθμους. Χρησιμοποιώντας τις τεχνικές των εργασιών [2, 21, 59], αποδεικνύουμε ότι, για την περίπτωση αυθαίρετα πολλών συχνοτήτων, ο άπληστος αλγόριθμος έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ 4.521 και 5.517 σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k \in \{3, 4, 5\}$  και  $k \geq 6$ , αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας το παράδειγμα “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής” και χρησιμοποιώντας έναν αποδοτικό χρωματισμό για το γράφη-

μα παρεμβολών κυψελικών δικτύων με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k > 2$  θα προέκυπταν πιθανοτικοί on-line αλγόριθμοι με συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\Omega(k^2)$ . Ακόμα και στην περίπτωση που  $k = 3$ , ο συγκριτικός λόγος απόδοσης που θα πετυχαίναμε με τον τρόπο αυτό θα ήταν 7.

Στην παρούσα διατριβή, βελτιώνουμε προηγούμενα αποτελέσματα για τη συγκριτική απόδοση on-line αλγορίθμων αποδοχής κλήσεων σε κυψελικά δίκτυα (Ενότητα 3.6). Παρουσιάζουμε αλγόριθμους βασισμένους στο παράδειγμα “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής” χρησιμοποιώντας νέους χρωματισμούς του γραφήματος παρεμβολών. Αυτοί οι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν μικρό αριθμό τυχαίων δυαδικών ψηφίων, και έχουν μικρούς συγκριτικούς λόγους απόδοσης απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη ακόμα και στην περίπτωση δικτύων που υποστηρίζουν αυθαίρετα πολλές συχνότητες. Ειδικότερα, σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2, βελτιώνουμε σημαντικά τα καλύτερα γνωστά φράγματα για τη συγκριτική απόδοση που επιτυγχάνονται από τον αλγόριθμο  $p$ -RANDOM παρουσιάζοντας μια σειρά απλών πιθανοτικών αλγορίθμων που έχουν μικρότερους συγκριτικούς λόγους απόδοσης, δουλεύουν σε δίκτυα που υποστηρίζουν αυθαίρετα πολλές συχνότητες, και χρησιμοποιούν μόνο ένα σταθερό αριθμό τυχαίων δυαδικών ψηφίων ή μια συγκριτικά ασθενή πηγή τυχαιότητας. Το καλύτερο άνω φράγμα για τη συγκριτική απόδοση που επιτυγχάνουμε είναι  $7/3$ . Για κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k > 2$ , παρουσιάζουμε (Ενότητα 3.7) απλούς πιθανοτικούς on-line αλγόριθμους αποδοχής κλήσεων με συγκριτικούς λόγους απόδοσης που βελτιώνουν σημαντικά τα κάτω φράγματα για τη συγκριτική απόδοση των ντετερμινιστικών αλγορίθμων και χρησιμοποιούν μόνο  $O(\log k)$  τυχαία δυαδικά ψηφία. Για κάθε  $k > 2$ , ο συγκριτικός λόγος απόδοσης που επιτυγχάνουμε είναι αυστηρά μικρότερος του 4.

Κανένας ντετερμινιστικός on-line αλγόριθμος ελέγχου κλήσεων δε μπορεί να επιτύχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από 3 απέναντι σε off-line αντιπάλους σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2, που υποστηρίζουν μία συχνότητα. Στην Ενότητα 3.8, επεκτείνουμε αυτό το κάτω φράγμα σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k \in \{3, 4, 5\}$  αν  $k \geq 6$  που υποστηρίζουν μία συχνότητα και αποδεικνύουμε κάτω φράγματα με τιμές 4 και 5, αντίστοιχα. Για την περίπτωση πιθανοτικών αλγορίθμων απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k \geq 5$  και  $k = 12$ , αποδεικνύουμε αντίστοιχα κάτω φράγματα για το συγκριτικό λόγο απόδοσής τους με τιμές  $25/12$  και  $127/60$ , αντίστοιχα. Οι τιμές ισχύουν για δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα, αλλά πολύ εύκολα μπορούν να επεκταθούν και σε δίκτυα που υποστηρίζουν αυθαίρετα πολλές συχνότητες.

### 3.1 Περιγραφή γνωστών αλγορίθμων

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζουμε με συντομία δύο γνωστούς on-line αλγόριθμους ελέγχου αποδοχής κλήσεων για ασύρματα κυψελικά δίκτυα: τον άπληστο αλγόριθμο και έναν πιθανοτικό αλγόριθμο που βασίζεται στην τεχνική “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής”. Επιπλέον, παρουσιάζουμε έναν απλό τρόπο για την μετατροπή αλγορίθμων ελέγχου αποδοχής κλήσεων που είναι σχεδιασμένοι για δίκτυα με μία συχνότητα σε αντίστοιχους για δίκτυα με πολλές συχνότητες, με μικρή αύξηση του συγκριτικού λόγου απόδοσης. Επίσης, παρουσιάζουμε ένα κάτω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης ντετερμινιστικών on-line αλγορίθμων ελέγχου αποδοχής κλήσεων.

Υποθέτουμε ότι μια ακολουθία κλήσεων  $\sigma$  εμφανίζεται σε ένα δίκτυο που υποστηρίζει  $w$  συχνότητες  $1, 2, \dots, w$ . Ο άπληστος αλγόριθμος είναι ένας διαισθητικός ντετερμινιστικός αλγόριθμος. Για κάθε νέα κλήση  $c$  σε μια κυψέλη  $v$ , ο άπληστος αλγόριθμος αναζητά την ελάχιστη διαθέσιμη συχνότητα, δηλαδή, την ελάχιστη μεταξύ των συχνοτήτων  $1, 2, \dots, w$  που δεν έχει ανατεθεί σε κλήσεις στην κυψέλη  $v$  ή σε γειτονικές της κυψέλες. Αν υπάρχει τέτοια συχνότητα, η κλήση  $c$  γίνεται αποδεκτή και τής ανατίθεται η συγκεκριμένη συχνότητα. Διαφορετικά, η κλήση απορρίπτεται.

Οι Pantziou και άλλοι στην εργασία [52] απέδειξαν ότι αυτός ο αλγόριθμος έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ  $\Delta$  θεωρώντας off-line αντιπάλους για δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα (και  $\Delta + 1$  για δίκτυα που υποστηρίζουν πολλές συχνότητες), όπου  $\Delta$  είναι ο βαθμός του δικτύου. Επεκτείνουμε την τεχνική τους και αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 3.** Έστω  $G = (V, E)$  ένα γράφημα παρεμβολών,  $v$  μια κορυφή του γραφήματος  $G$ , και  $\Gamma_v$  το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο στη γειτονιά της κορυφής  $v$ . Ο άπληστος αλγόριθμος έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\gamma = \max_{v \in V} |\Gamma_v|$  σε δίκτυο με γράφημα παρεμβολών  $G$ , που υποστηρίζει μία συχνότητα.

*Απόδειξη.* Έστω  $B_A$  που γίνονται αποδεκτές από τον άπληστο αλγόριθμο και  $B_{OPT}$  το σύνολο των κλήσεων που γίνονται αποδεκτές από το βέλτιστο αλγόριθμο.

Ο αριθμός των κλήσεων που απορρίφθηκαν από τον αλγόριθμο  $A$  λόγω των κλήσεων του συνόλου  $B_A \setminus B_{OPT}$  είναι το πολύ  $\gamma |B_A \setminus B_{OPT}|$ . Πράγματι, το καλύτερο που θα μπορούσε να κάνει ο βέλτιστος αλγόριθμος θα ήταν να απορρίψει μια κλήση  $r_i \in B_A \setminus B_{OPT}$  στην κυψέλη  $c_i$  την οποία θα δεχόταν ο άπληστος αλγόριθμος, και να αποδεχτεί το πολύ  $\gamma$  κλήσεις που εμφανίζονται σε κυψέλες γειτονικές της  $c_i$ .

Αφού το δίκτυο υποστηρίζει μόνο μία συχνότητα, καμία κλήση του συνόλου  $B_{OPT} \cap B_A$  δε μπορεί να προκαλέσει την απόρριψη οποιασδήποτε άλλης

κλήσης του συνόλου  $B_{OPT}$ , γιατί οι κλήσεις του συνόλου  $B_{OPT}$  εμφανίζονται σε διαφορετικές, μη γειτονικές κυψέλες. Επομένως,

$$\begin{aligned} |B_{OPT} \setminus B_A| &\leq \gamma |B_A \setminus B_{OPT}| \Rightarrow \\ |B_{OPT} \setminus B_A| + |B_{OPT} \cap B_A| &\leq \gamma |B_A \setminus B_{OPT}| + |B_{OPT} \cap B_A| \Rightarrow \\ |B_{OPT}| &\leq \gamma |B_A|. \end{aligned}$$

Κι έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος.  $\square$

Οι Awerbuch και άλλοι στην εργασία [1] παρουσιάζουν έναν απλό τρόπο για τη μετατροπή αλγορίθμων ελέγχου αποδοχής κλήσεων που είναι σχεδιασμένοι για δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα σε αλγόριθμους ελέγχου αποδοχής κλήσεων για δίκτυα που υποστηρίζουν αυθαίρετο αριθμό συχνότητων, με μικρή αύξηση του συγκριτικού λόγου απόδοσης. Θεωρούμε ένα ασύρματο κυβελικό δίκτυο και έναν (ντετερμινιστικό ή πιθανοτικό) on-line αλγόριθμο ελέγχου αποδοχής κλήσεων  $A$  για δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα. Ένας αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων  $A'$  για δίκτυα που υποστηρίζουν  $w$  συχνότητες μπορεί να κατασκευαστεί με τον εξής τρόπο. Για κάθε κλήση  $c$ , εκτελούμε τον αλγόριθμο  $A$  για κάθε μια από τις  $w$  συχνότητες μέχρι είτε η  $c$  να γίνει αποδεκτή είτε να εξαντληθεί το φάσμα το συχνότητων (και η κλήση  $c$  να απορριφθεί), δηλαδή:

Αλγόριθμος  $A'$

1. για κάθε νέα κλήση  $c$
2.     από  $i = 1$  έως  $w$
3.         εκτέλεσε τον  $A(c)$  για τη συχνότητα  $i$
4.         αν η  $c$  έγινε αποδεκτή τότε
5.             ανάθεσε τη συχνότητα  $i$  στην  $c$
6.             τερμάτισε
7.     απόρριψε την  $c$ .

Οι Awerbuch και άλλοι στην εργασία [1] αποδεικνύουν ότι αν ο  $A$  έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\rho$ , τότε ο  $A'$  έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης

$$\frac{1}{1 - \exp(-1/\rho)}.$$

Έτσι, μπορούμε να δείξουμε ότι ο άπληστος αλγόριθμος για δίκτυα με πολλές συχνότητες έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης

$$\frac{1}{1 - \exp(-1/\gamma)} < \Delta + 1,$$

χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό ότι ο άπληστος αλγόριθμος για μία συχνότητα έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\gamma$ .

Σε κυψελικά δίκτυα, όπου το γράφημα παρεμβολών είναι εξαγωνικό, είναι  $\gamma = 3$ , οπότε συνεπάγεται το ακόλουθο συμπέρασμα.

**Συμπέρασμα 4.** *Ο άπληστος αλγόριθμος έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης 3.53 απέναντι σε έναν off-line αντίπαλο όταν εκτελείται σε κυψελικά δίκτυα.*

Ο αλγόριθμος “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής” χρησιμοποιεί έναν χρωματισμό των κυψελών του δικτύου (χρωματισμό του γραφήματος παρεμβολών) με θετικούς ακεραίους (χρώματα)  $1, 2, \dots$  έτσι ώστε γειτονικές κυψέλες να έχουν διαφορετικά χρώματα. Ο πιθανοτικός αλγόριθμος κατατάσσει τις κλήσεις της ακολουθίας σε κλάσεις. Η κλάση  $i$  περιέχει κλήσεις που εμφανίστηκαν σε κυψέλες χρωματισμένες με το χρώμα  $i$ . Στη συνέχεια, επιλέγει ομοιόμορφα και τυχαία μία από τις κλάσεις και ασχολείται μόνο με κλήσεις που ανήκουν στην κλάση αυτή, απορρίπτοντας όλες τις υπόλοιπες. Όταν εμφανίζεται μια κλήση της επιλεγμένης κλάσης, χρησιμοποιείται ο άπληστος αλγόριθμος.

Χρησιμοποιώντας απλά επιχειρήματα, οι Awerbuch και άλλοι στην εργασία [3] (όπως επίσης και στην εργασία των Pantziou και άλλων [52]) αποδεικνύουν ότι ο αλγόριθμος “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής” έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\chi$  θεωρώντας αντιπάλους “χωρίς μνήμη”, όπου  $\chi$  είναι ο αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται για το χρωματισμό των κυψελών του δικτύου. Έτσι προκύπτουν αλγόριθμοι με συγκριτικό λόγο απόδοσης ίσο με το χρωματικό αριθμό (και, γενικά, όχι καλύτεροι) του αντίστοιχου γραφήματος παρεμβολών, δεδομένου ότι είναι διαθέσιμος ένας βέλτιστος χρωματισμός (δηλαδή, ένας χρωματισμός με τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων). Σημειώνουμε ότι, για ασύρματα κυψελικά δίκτυα βαθμού  $\Delta$ , ο χρωματικός αριθμός του αντίστοιχου γραφήματος παρεμβολών μπορεί να είναι μέχρι και  $\Delta + 1$ .

**Θεώρημα 5** ([1, 52]). *Ο αλγόριθμος ACRS έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης 3 απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.*

Σημειώνουμε ότι το  $\gamma$  αποτελεί ένα κάτω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης οποιουδήποτε ντετερμινιστικού αλγορίθμου. Θεωρούμε ένα δίκτυο που υποστηρίζει μία συχνότητα που αποτελείται από μία κυψέλη  $v$  και  $\gamma$  αμοιβαία μη γειτονικές κυψέλες  $v_1, v_2, \dots, v_\gamma$  γειτονικές στη  $v$ . Θεωρούμε, τώρα, την εξής ακολουθία κλήσεων που παράγεται από κάποιον αντίπαλο που γνωρίζει τον τρόπο με τον οποίο ο αλγόριθμος λαμβάνει τις αποφάσεις του. Αρχικά, μια κλήση  $c$  εμφανίζεται στην κυψέλη  $v$ . Αν ο αλγόριθμος απορρίψει την  $c$ , ο αντίπαλος σταματά την ακολουθία. Σε αυτή την περίπτωση, ο αλγόριθμος δεν έχει κέρδος από την εκτέλεσή του. Αν ο αλγόριθμος κάνει αποδεκτή την

κλήση  $c$ , ο αντίπαλος παρουσιάζει  $\gamma$  κλήσεις  $c_1, c_2, \dots, c_\gamma$  στις κυψέλες  $v_1, v_2, \dots, v_\gamma$ , αντίστοιχα. Ο αλγόριθμος έχει κέρδος 1 ενώ ο βέλτιστος αλγόριθμος πετυχαίνει κέρδος  $\gamma$  απορρίπτοντας την κλήση  $c$  και κάνοντας αποδεκτές τις κλήσεις  $c_1, \dots, c_\gamma$ .

Για κυψελικά δίκτυα ισχύει:

**Θεώρημα 6.** *Κανένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος δε μπορεί να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από 3 απέναντι σε έναν off-line αντίπαλο.*

Προφανώς, η καλύτερη απόδοση επιτυγχάνεται αν ο αλγόριθμος  $A$  αποδέχεται κάθε κλήση που εμφανίζεται σε κυψέλη που δεν είναι γειτονική με κυψέλη που περιέχει κλήση που έχει ήδη γίνει αποδεκτή. Αυτό όμως είναι ακριβώς ό,τι κάνει ο άπληστος αλγόριθμος για δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα.

Με βάση πρόσφατη εργασία του Trevisan [55] στο πρόβλημα του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου για γραφήματα φραγμένου βαθμού προκύπτει ότι, γενικά, στη στατική του εκδοχή το πρόβλημα ελέγχου αποδοχής κλήσεων για δίκτυα με βαθμό  $\Delta$  είναι μη προσεγγίσιμο σε  $O\left(\Delta/2^{O(\sqrt{\log \Delta})}\right)$ . Αυτό σημαίνει ότι πρακτικοί (δηλαδή, αλγόριθμοι που λαμβάνουν τις αποφάσεις τους σε πολυωνυμικό χρόνο) πιθανοτικοί on-line αλγόριθμοι με συγκριτικό λόγο απόδοσης ασυμπτωτικά καλύτερο από  $O(\Delta^{1-\epsilon})$  για κάποιο  $\epsilon > 0$  είναι μη εφικτοί.

## 3.2 Ο αλγόριθμος $p$ -RANDOM

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο  $p$ -RANDOM, έναν πιθανοτικό αλγόριθμο ελέγχου κλήσεων για ασύρματα κυψελικά δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα και αναλύουμε την απόδοσή του. Ο αλγόριθμος  $p$ -RANDOM δέχεται σαν είσοδο μια ακολουθία κλήσεων με on-line τρόπο και λειτουργεί ως εξής.

1. Αρχικά όλες οι κυψέλες είναι unmarked.
2. για κάθε καινούρια κλήση  $c$  στην κυψέλη  $v$
3.     αν η κυψέλη  $v$  είναι marked, τότε απόρριψε την κλήση  $c$ .
4.     αν η κλήση  $c$  εμφανίζεται σε κάποια κυψέλη τέτοια ώστε είτε σε αυτή είτε σε γειτονική της υπάρχει κλήση που έχει γίνει αποδεκτή, τότε απόρριψε την κλήση  $c$
5.     διαφορετικά
6.     με πιθανότητα  $p$  κάνε δεκτή την κλήση  $c$ .
7.     με πιθανότητα  $1 - p$  απόρριψε την κλήση  $c$  και κάνε mark την κυψέλη  $v$ .

Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια παράμετρο  $p \in [1/\Delta, 1]$ , όπου  $\Delta$  είναι ο βαθμός του δικτύου. Είναι προφανές ότι αν  $p < 1/\Delta$ , ο συγκριτικός λόγος απόδοσης είναι μεγαλύτερος από  $\Delta$ , αφού η μέση τιμή του κέρδους από την εκτέλεση του αλγορίθμου σε μια ακολουθία που αποτελείται από μία μόνο κλήση είναι  $p$ . Ο αλγόριθμος είναι απλός και μπορεί εύκολα να υλοποιηθεί με μικρή επιβάρυνση στην επικοινωνία (ανταλλαγή μηνυμάτων) μεταξύ των σταθμών βάσης του δικτύου.

Η διαδικασία marking των κυψελών στην περίπτωση που κλήσεις που φτάνουν σε αυτές απορρίπτονται εγγυάται ότι ο αλγόριθμος  $p$ -RANDOM δεν εξομοιώνει τον άπληστο ντετερμινιστικό αλγόριθμο. Έστω ότι δε γίνεται χρήση marking των κυψελών. Θεωρούμε τότε έναν αντίπαλο ο οποίος παρουσιάζει  $t$  κλήσεις σε μια κυψέλη  $v$  και από μια κλήση στις  $\Delta$  (αμοιβαία μη γειτονικές) κυψέλες που είναι γειτονικές με την  $v$ . Η πιθανότητα με την οποία ο πιθανοτικός αλγόριθμος δεν κάνει αποδεκτή μια κλήση στην κυψέλη  $v$  μειώνεται εκθετικά καθώς ο αριθμός  $t$  αυξάνεται (άρα το κέρδος είναι με μεγάλη πιθανότητα 1, ενώ το βέλτιστο κέρδος είναι  $\Delta$ ).

Σημειώνουμε ότι ο αλγόριθμος  $p$ -RANDOM μπορεί να κάνει αποδεκτή τουλάχιστο μία κλήση σε κάθε κυψέλη αλλά αυτό ισχύει και για κάθε αλγόριθμο που εκτελείται σε δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα (συμπεριλαμβανομένου του βέλτιστου). Επομένως, για τη συγκριτική ανάλυση του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM, θα ασχοληθούμε μόνο με ακολουθίες κλήσεων που εμφανίζουν το πολύ μία κλήση ανά κυψέλη. Έτσι, δε χρειάζεται να λάβουμε υπόψη μας την επίδραση της διαδικασίας marking κατά την ανάλυσή μας.

Αποδεικνύουμε τώρα ένα άνω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM σε συνάρτηση του  $p$ . Το βασικό μας αποτέλεσμα είναι το εξής.

**Θεώρημα 7.** Για  $p \in [1/3, 1]$ , ο αλγόριθμος  $p$ -RANDOM έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ

$$\frac{3}{5p - 7p^2 + 3p^3}$$

απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.

*Απόδειξη.* Έστω μια ακολουθία κλήσεων  $\sigma$ . Υποθέτουμε ότι η  $\sigma$  έχει προκαθοριστεί και θα αποκαλύπτεται στον αλγόριθμο on-line. Κάνουμε αυτή την παραδοχή γιατί ενδιαφερόμαστε για τη συγκριτική απόδοση του αλγορίθμου απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη των οποίων η γνώση περιορίζεται στην πιθανοτική κατανομή των τυχαίων επιλογών του αλγορίθμου (δηλαδή, στην παράμετρο  $p$ ).

Θεωρούμε την εκτέλεση του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM για την ακολουθία  $\sigma$ . Για κάθε κλήση  $c \in \sigma$ , συμβολίζουμε με  $X(c)$  την τυχαία μεταβλητή που

δηλώνει αν ο αλγόριθμος έκανε αποδεκτή την κλήση  $c$ . Προφανώς, το κέρδος του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM για την ακολουθία  $\sigma$  μπορεί να εκφραστεί ως

$$B(\sigma) = \sum_{c \in \sigma} X(c).$$

Έστω  $A(\sigma)$  το σύνολο των κλήσεων της  $\sigma$  που γίνονται δεκτές από το βέλτιστο αλγόριθμο. Για κάθε κλήση  $c \in A(\sigma)$ , ορίζουμε το καταναμημένο κέρδος  $\bar{b}(c)$  ως

$$\bar{b}(c) = X(c) + \sum_{c' \in \gamma(c)} \frac{X(c')}{d(c')},$$

όπου  $\gamma(c)$  συμβολίζει το σύνολο των κλήσεων της ακολουθίας σε κυψέλες γειτονικές της  $c$ . Για κάθε κλήση  $c' \notin A(\sigma)$ ,  $d(c')$  είναι ο αριθμός των κλήσεων της  $A(\sigma)$  που εμφανίζονται σε κυψέλες γειτονικές της κυψέλης στην οποία εμφανίζεται η κλήση  $c$ . Από τις δύο παραπάνω ισότητες, συνεπάγεται ότι

$$B(\sigma) = \sum_{c \in A(\sigma)} \bar{b}(c).$$

Επιπλέον, σημειώνουμε ότι για κάθε κλήση  $c' \notin A(\sigma)$ ,  $d(c') \leq 3$ . Καταλήγουμε στο ότι

$$\bar{b}(c) \geq X(c) + \frac{\sum_{c' \in \gamma(c)} X(c')}{3}$$

και, από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής,

$$\mathcal{E}[B(\sigma)] \geq \sum_{c \in A(\sigma)} \left( \mathcal{E} \left[ X(c) + \frac{\sum_{c' \in \gamma(c)} X(c')}{3} \right] \right) \quad (3.1)$$

Έστω  $\gamma'(c)$  το σύνολο των κλήσεων σε κυψέλες γειτονικές της κυψέλης στην οποία εμφανίζεται η κλήση  $c$  που εμφανίζονται πριν από τη  $c$  στην ακολουθία  $\sigma$ . Προφανώς,  $\gamma'(c) \subseteq \gamma(c)$ , που συνεπάγεται ότι

$$\sum_{c' \in \gamma(c)} X(c') \geq \sum_{c' \in \gamma'(c)} X(c').$$

Επομένως, από τη (3.14) έχουμε

$$\mathcal{E}[B(\sigma)] \geq \sum_{c \in A(\sigma)} \left( \mathcal{E} \left[ X(c) + \frac{\sum_{c' \in \gamma'(c)} X(c')}{3} \right] \right) \quad (3.2)$$



Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να φράξουμε από κάτω τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $X(c) + \frac{\sum_{c' \in \gamma'(c)} X(c')}{3}$ , για κάθε κλήση  $c \in A(\sigma)$ .

Ασχολούμαστε μόνο με μια κλήση  $c \in A(\sigma)$ . Έστω  $\Omega = 2^{\gamma'(c)}$  το σύνολο που περιέχει όλα τα πιθανά υποσύνολα της  $\gamma'(c)$ . Ορίζουμε σα γειτονιά της  $c$ , και συμβολίζουμε με  $\Gamma(c)$ , το υποσύνολο της  $\gamma'(c)$  που περιέχει τις κλήσεις της  $\gamma'(c)$  οι οποίες, όταν εμφανίζονται, δεν υπόκεινται σε περιορισμούς από κλήσεις της ακολουθίας  $\sigma$  σε κυψέλες που βρίσκονται σε απόσταση 2 από την κυψέλη στην οποία εμφανίζεται η κλήση  $c$ . Προφανώς, η  $\Gamma(c)$  είναι μια τυχαία μεταβλητή που λαμβάνει τιμές από το δειγματοχώρο  $\Omega$ . Άρα, το αν μια βέλτιστη κλήση  $c$  γίνεται αποδεκτή από τον αλγόριθμο εξαρτάται από τη γειτονιά της,  $\Gamma(c)$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} & \mathcal{E} \left[ X(c) + \frac{\sum_{c' \in \gamma'(c)} X(c')}{3} \right] = \\ & \sum_{\gamma \in \Omega} \mathcal{E} \left[ X(c) + \frac{\sum_{c' \in \gamma} X(c')}{3} \middle| \Gamma(c) = \gamma \right] \cdot \Pr[\Gamma(c) = \gamma] \geq \\ & \min_{\gamma \in \Omega} \left\{ \mathcal{E} \left[ X(c) + \frac{\sum_{c' \in \gamma} X(c')}{3} \middle| \Gamma(c) = \gamma \right] \right\} = \\ & \min_{\gamma \in \Omega} \left\{ \mathcal{E}[X(c) | \Gamma(c) = \gamma] + \frac{\mathcal{E}[\sum_{c' \in \gamma} X(c') | \Gamma(c) = \gamma]}{3} \right\} \quad (3.3) \end{aligned}$$

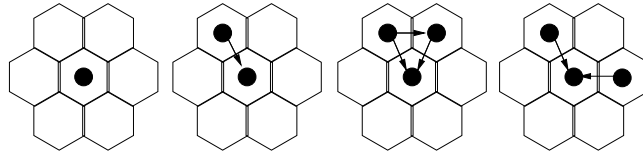
Για να υπολογίσουμε την  $\mathcal{E}[X(c) | \Gamma(c) = \gamma]$ , παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος  $p$ -RANDOM μπορεί να κάνει αποδεκτή την κλήση  $c$  μόνον αν έχει απορρίψει όλες τις κλήσεις στη γειτονιά της,  $\gamma$ . Η πιθανότητα να έχουν απορριφθεί όλες οι κλήσεις της  $\gamma$  δεδομένου ότι  $\Gamma(c) = \gamma$  είναι  $(1-p)^{|\gamma|}$ , και τότε η κλήση  $c$  γίνεται αποδεκτή με πιθανότητα  $p$ . Επομένως,

$$\mathcal{E}[X(c) | \Gamma(c) = \gamma] = p(1-p)^{|\gamma|}. \quad (3.4)$$

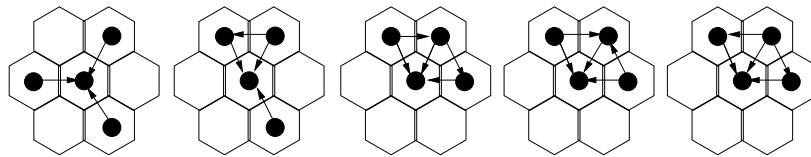
Τώρα φράσσουμε από κάτω την  $\mathcal{E}[\sum_{c' \in \gamma} X(c') | \Gamma(c) = \gamma]$  διακρίνοντας μεταξύ περιπτώσεων ανάλογα με το μέγεθος της γειτονιάς  $|\gamma|$ .

**Πρόταση 8.** Για κάθε  $p \in [1/3, 1]$ ,

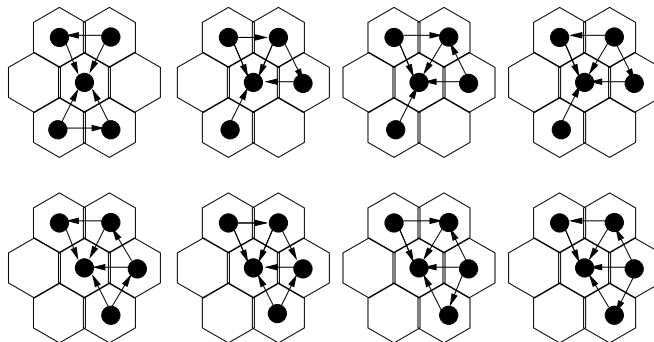
$$\mathcal{E} \left[ \sum_{c' \in \gamma} X(c') | \Gamma(c) = \gamma \right] \geq \begin{cases} 0 & \text{if } |\gamma| = 0 \\ p & \text{if } |\gamma| = 1 \\ 2p - p^2 & \text{if } |\gamma| = 2 \\ 3p - 2p^2 & \text{if } |\gamma| = 3 \\ 4p - 3p^2 + p^3 & \text{if } |\gamma| = 4 \\ 5p - 4p^2 + p^3 & \text{if } |\gamma| = 5 \\ 6p - 5p^2 + p^3 & \text{if } |\gamma| = 6 \end{cases}$$



Σχήμα 3.1: Οι περιπτώσεις που  $|\gamma| = 0, 1, 2$ .

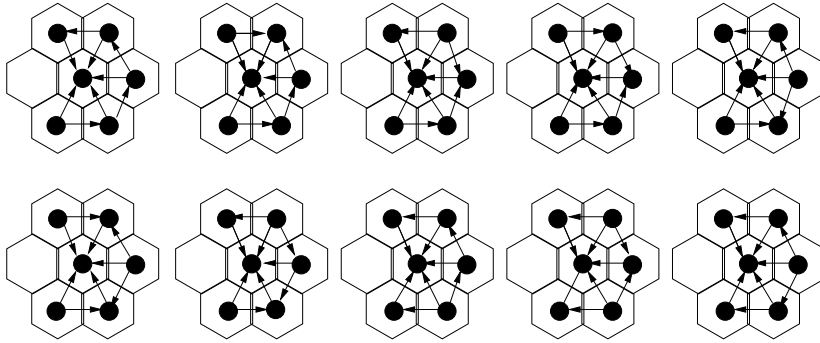


Σχήμα 3.2: Η περίπτωση που  $|\gamma| = 3$ .

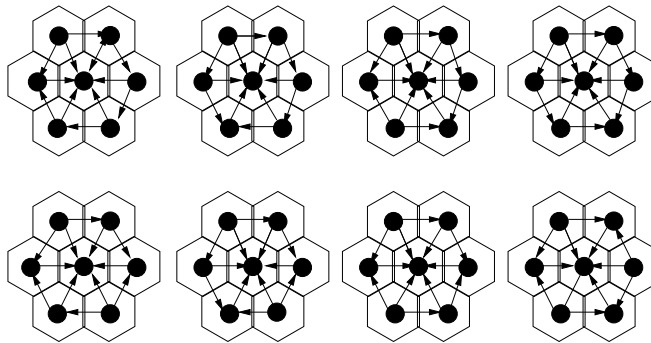


Σχήμα 3.3: Η περίπτωση που  $|\gamma| = 4$ .

*Απόδειξη.* Στα σχήματα 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, και 3.5 δίνουμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις για τη γειτονιά μιας βέλτιστης κλήσης  $c$  σε μια ακολουθία κλήσεων



Σχήμα 3.4: Η περίπτωση που  $|\gamma| = 5$ .



Σχήμα 3.5: Η περίπτωση που  $|\gamma| = 6$ .

$\sigma$ . Σε κάθε σχήμα η βέλτιστη κλήση συμβολίζεται με έναν μαύρο κύκλο στη μέση της κυψέλης ενώ μαύροι κύκλοι στις εξωτερικές κυψέλες συμβολίζουν κλήσεις στην γειτονιά  $\gamma$  της  $c$ . Ένα βέλος από μια κλήση  $c_1$  προς μια άλλη κλήση  $c_2$  σημαίνει ότι η  $c_1$  εμφανίζεται στην ακολουθία  $\sigma$  πριν την  $c_2$ . Στα σχήματα, έχουμε παραλείψει τις συμμετρικές περιπτώσεις.

Η απόδειξη είναι πολύ απλή για τις περιπτώσεις  $|\gamma| = 0$  και  $|\gamma| = 1$  (οι δύο πιο αριστερά περιπτώσεις του Σχήματος 3.1). Στην τρίτη περίπτωση του Σχήματος 3.1 (όπου  $|\gamma| = 2$ ), παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος αποδέχεται την πρώτη κλήση στην  $\gamma$  με πιθανότητα  $p$  και τη δεύτερη με πιθανότητα  $p(1-p)$ . Συνολικά, ο μέσος αριθμός αποδεκτών κλήσεων στη  $\gamma$  είναι  $2p - p^2$ . Στην πιο δεξιά περίπτωση του Σχήματος 3.1, ο μέσος αριθμός των αποδεκτών κλήσεων στη  $\gamma$  είναι  $2p < 2p - p^2$ .

Όμοια, μπορούμε να υπολογίσουμε τα επιθυμητά κάτω φράγματα για την  $\mathcal{E}[\sum_{c' \in \gamma} X(c') | \Gamma(c) = \gamma]$  στις περιπτώσεις που  $|\gamma| = 3, 4, 5, 6$ .  $\square$

Κάνοντας υπολογισμούς με τις (3.16), (3.17), και την Πρόταση 8, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} & \mathcal{E} \left[ X(c) + \frac{\sum_{c' \in \gamma'(c)} X(c')}{3} \right] \geq \\ & \min_{\gamma \in \Omega} \left\{ \mathcal{E}[X(c)|\Gamma(c) = \gamma] + \frac{\mathcal{E}[\sum_{c' \in \gamma} X(c')|\Gamma(c) = \gamma]}{3} \right\} \geq \\ & \min_{\gamma \in \Omega: |\gamma|=2} \left\{ \mathcal{E}[X(c)|\Gamma(c) = \gamma] + \frac{\mathcal{E}[\sum_{c' \in \gamma} X(c')|\Gamma(c) = \gamma]}{3} \right\} \geq \\ & p(1-p)^2 + \frac{2p-p^2}{3} = \frac{5p-7p^2+3p^3}{3} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (3.15) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[B(\sigma)] & \geq \sum_{c \in A(\sigma)} \frac{5p-7p^2+3p^3}{3} \\ & = \frac{5p-7p^2+3p^3}{3} \cdot B_{OPT}(\sigma) \end{aligned}$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος 7.  $\square$

Η έκφραση στο Θεώρημα 7 ελαχιστοποιείται στην τιμή  $729/265 = 2.651$  για  $p = 5/9$ . Επομένως, καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα.

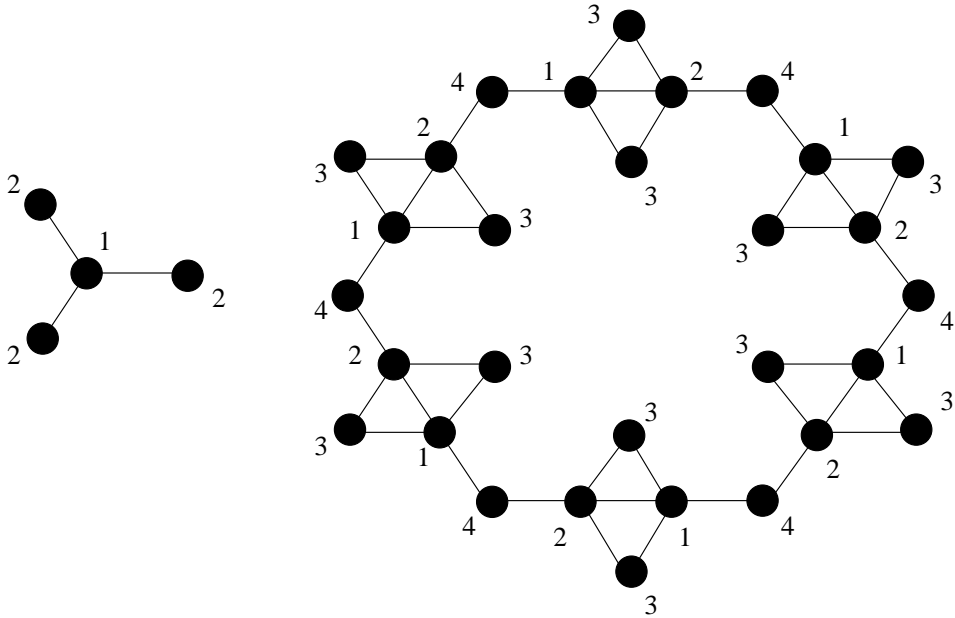
**Συμπέρασμα 9.** Υπάρχει ένας *on-line* πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου κλήσεων για κυβελικά δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα που έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ 2.651 απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.

Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι η ανάλυσή μας είναι σχεδόν αυστηρή. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι:

**Θεώρημα 10.** Ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη είναι τουλάχιστον

$$\max \left\{ \frac{3}{4p-3p^2}, \frac{3}{5p-7p^2+4p^3-p^4} \right\}.$$

*Απόδειξη.* Θα αποδείξουμε το κάτω φράγμα κατασκευάζοντας δύο ακολουθίες κλήσεων  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  για τις οποίες ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM είναι  $\frac{3}{4p-3p^2}$  και  $\frac{3}{5p-7p^2+4p^3-p^4}$ , αντίστοιχα.



Σχήμα 3.6: Το κάτω φράγμα για την απόδοση του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM.

Η ακολουθία  $\sigma_1$  φαίνεται αριστερά στο Σχήμα 3.6. Στον πρώτο γύρο, μία κλήση εμφανίζεται σε κάποια κυψέλη  $c$ , και στο δεύτερο γύρο μία κλήση εμφανίζεται σε κάθε μία από τις τρεις αμοιβαία γειτονικές κυψέλες στη γειτονιά της κυψέλης  $c$ . Προφανώς, το κέρδος του βέλτιστου αλγορίθμου είναι 3. Για να υπολογίσουμε το μέσο κέρδος του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM, παρατηρούμε ότι με πιθανότητα  $p$ , η κλήση που εμφανίζεται στον πρώτο γύρο εξυπηρετείται, και με πιθανότητα  $1 - p$ , η κλήση που εμφανίζεται στον πρώτο γύρο απορρίπτεται και κάθε μια από τις τρεις κλήσεις που εμφανίζονται στο δεύτερο γύρο εξυπηρετείται με πιθανότητα  $p$ . Επομένως, το μέσο κέρδος του αλγορίθμου όταν εκτελείται για την ακολουθία  $\sigma_1$  είναι  $p + (1 - p)3p = 4p - 3p^2$ .

Η ακολουθία  $\sigma_2$  φαίνεται δεξιά στο Σχήμα 3.6. Οι κλήσεις εμφανίζονται σε τέσσερις γύρους. Οι επιγραφές στις κλήσεις δηλώνουν το γύρο στον οποίο εμφανίστηκαν. Προφανώς, το κέρδος του βέλτιστου αλγορίθμου είναι 18, αφού ο βέλτιστος αλγόριθμος θα εξυπηρετούσε τις κλήσεις που εμφανίζονται στους γύρους 3 και 4. Για να υπολογίσουμε το μέσο κέρδος του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM όταν εκτελείται για την ακολουθία  $\sigma_2$ , αρχικά υπολογίζουμε την πιθανότητα να εξυπηρετηθούν τελικά όλες οι κλήσεις.

- Μια κλήση που εμφανίζεται στον πρώτο γύρο εξυπηρετείται με πιθανότητα  $p$ .

- Μια κλήση που εμφανίζεται στον δεύτερο γύρο μπορεί να εξυπηρετηθεί αν η γειτονική της κλήση που εμφανίστηκε στον πρώτο γύρο απορρίφθηκε· επομένως, η πιθανότητα μια κλήση που εμφανίζεται στο δεύτερο γύρο να γίνει αποδεκτή είναι  $p(1 - p)$ .
- Μια κλήση που εμφανίζεται στον τρίτο γύρο μπορεί να εξυπηρετηθεί αν οι γειτονικές της κλήσεις που εμφανίστηκαν στον πρώτο και δεύτερο γύρο απορρίφθηκαν· επομένως, η μια κλήση που εμφανίζεται στον τρίτο γύρο να γίνει αποδεκτή είναι  $p(1 - p)^2$ .
- Μια κλήση που εμφανίζεται στον τέταρτο γύρο μπορεί να εξυπηρετηθεί αν οι γειτονικές της κλήσεις που εμφανίστηκαν στον πρώτο και δεύτερο γύρο απορρίφθηκαν. Η πιθανότητα να απορριφθεί μια κλήση που εμφανίστηκε στον πρώτο γύρο είναι  $1 - p$  ενώ η πιθανότητα να απορριφθεί μια κλήση που εμφανίστηκε στο δεύτερο γύρο είναι  $1 - p - (1 - p)^2$ . Επομένως, η πιθανότητα να γίνει αποδεκτή μια κλήση που εμφανίστηκε στον τέταρτο γύρο είναι  $p(1 - p)(1 - p - (1 - p)^2)$ .

Σημειώνουμε ότι ο αριθμός των κλήσεων που εμφανίζονται στους γύρους 1, 2, 3, και 4 είναι 6, 6, 12, και 6, αντίστοιχα. Επομένως, καταλήγουμε στο ότι το μέσο κέρδος του αλγορίθμου είναι

$$6p + 6p(1 - p) + 12p(1 - p)^2 + 6p(1 - p)(1 - p - (1 - p)^2) = 5p - 7p^2 + 4p^3 - p^4.$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος.  $\square$

Η έκφραση στο Θεώρημα 10 ελαχιστοποιείται για  $p \approx 0.6145$  στην τιμή 2.469. Επομένως, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα.

**Συμπέρασμα 11.** Για κάθε  $p \in (1/3, 1)$ , ο αλγόριθμος  $p$ -RANDOM έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης τουλάχιστον 2.469 απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.

Έστω  $p^* \in (1/3, 1)$  εκείνη η τιμή για την οποία ο αλγόριθμος  $p^*$ -RANDOM έχει καλύτερο συγκριτικό λόγο απόδοσης από κάθε αλγόριθμο  $p$ -RANDOM, για  $p \in [1/3, 1]$ . Από το Θεώρημα 10 και το Συμπέρασμα 9, λύνοντας την ανισότητα

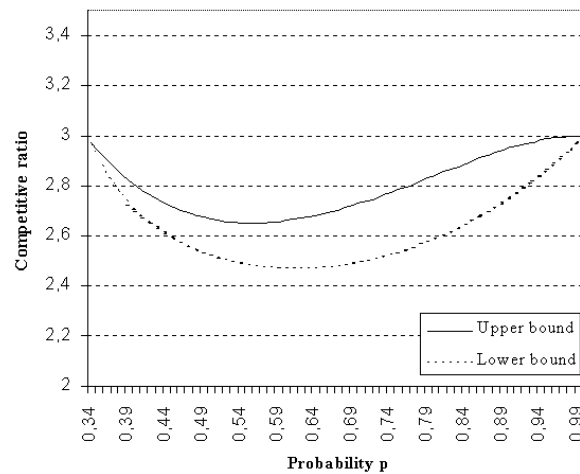
$$\max \left\{ \frac{3}{4p - 3p^2}, \frac{3}{5p - 7p^2 + 4p^3 - p^4} \right\} \leq \frac{729}{275}$$

καταλήγουμε στο εξής.

**Συμπέρασμα 12.**  $p^* \in [0.421, 0.843]$ .

## Συζήτηση

Έχουμε υπολογίσει άνω και κάτω φράγματα σε συναρτήσεις του  $p$  για τη συγκριτική απόδοση του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM για κυψελικά δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα. Μια γραφική αναπαράσταση και των δύο συναρτήσεων παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.7. Παρατηρούμε ότι υπάρχει ακόμα κάποια μικρή απόκλιση ανάμεσα στο άνω και το κάτω φράγμα η οποία ανέρχεται σε 0.25 για κάποιες τιμές του  $p$ .



Σχήμα 3.7: Γραφική αναπαράσταση του άνω και κάτω φράγματος για τη συγκριτική απόδοση του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM για  $p \in [1/3, 1]$ .

Μέχρι τώρα, έχουμε εξετάσει την περίπτωση δικτύων που υποστηρίζουν μία συχνότητα. Ένας αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων για  $w$  συχνότητες μπορεί να κατασκευαστεί με τον εξής τρόπο. Για κάθε κλήση  $c$ , εκτελούμε τον αλγόριθμο  $p$ -RANDOM για κάθε μία από τις  $w$  συχνότητες μέχρι είτε η κλήση  $c$  να εξυπηρετηθεί ή να εξαντληθεί το φάσμα συχνοτήτων (και η κλήση  $c$  να απορριφθεί). Χρησιμοποιώντας την τεχνική αυτή (που αναλύεται από τους Awerbuch και άλλους στην εργασία [1]), καταλήγουμε σε έναν αλγόριθμο ελέγχου αποδοχής κλήσεων για δίκτυα που υποστηρίζουν  $w$  συχνότητες ο οποίος έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης

$$\frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{w\rho(p)}\right)^w}$$

όπου  $\rho(p)$  είναι ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM για δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα. Ο συγκριτικός λόγος απόδοσης που

πετυχαίνουμε με τον τρόπο αυτό για την περίπτωση που το δίκτυο υποστηρίζει δύο συχνότητες είναι 2.927. Δυστυχώς, για μεγαλύτερο αριθμό συχνοτήτων, ο συγκριτικός λόγος απόδοσης που πετυχαίνουμε χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική είναι μεγαλύτερος από 3.

### 3.3 Ανάλυση του αλγορίθμου $p$ -RANDOM για αραιά δίκτυα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε την ανάλυση για το συγκριτικό λόγο απόδοσης του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM. Αρχικά παρουσιάζουμε την ανάλυση ανεξάρτητα από την τοπολογία του δικτύου. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την ανάλυση αυτή, αποδεικνύουμε το άνω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης του αλγορίθμου για δίκτυα βαθμού τρία (στην Ενότητα 3.3.1) και, παρουσιάζουμε περιληπτικά την απόδειξη για το άνω φράγμα για δίκτυα βαθμού τέσσερα (στην Ενότητα 3.3.2).

Έστω μια ακολουθία κλήσεων  $\sigma$ . Υποθέτουμε ότι η  $\sigma$  έχει προκαθοριστεί προηγουμένως και θα παρουσιάζεται στον αλγόριθμο με on-line τρόπο. Κάνουμε αυτή την υπόθεση γιατί ενδιαφερόμαστε για το συγκριτικό λόγο απόδοσης του αλγορίθμου σε σχέση με αντιπάλους “χωρίς μνήμη” που γνωρίζουν μόνο την πιθανοτική κατανομή των τυχαίων επιλογών του αλγορίθμου (δηλαδή, την παράμετρο  $p$ ).

Θεωρούμε την εκτέλεση του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM (για κάποιο  $p \in [0, 1]$ ) στη  $\sigma$ . Για κάθε κλήση  $c \in \sigma$ , συμβολίζουμε με  $X(c)$  την τυχαία μεταβλητή που δείχνει αν ο αλγόριθμος έκανε αποδεκτή την κλήση  $c$ , δηλαδή,

$$X(c) = \begin{cases} 0 & \text{αν η } c \text{ απορρίπτεται} \\ 1 & \text{αν η } c \text{ γίνεται αποδεκτή} \end{cases}$$

Προφανώς,

$$B(\sigma) = \sum_{c \in \sigma} X(c).$$

Έστω  $A(\sigma)$  το σύνολο όλων των κλήσεων της  $\sigma$  που γίνονται αποδεκτές από το βέλτιστο αλγόριθμο. Για κάθε κλήση  $c \in A(\sigma)$ , ορίζουμε το καταναμεμημένο κέρδος  $\bar{b}(c)$  ως

$$\bar{b}(c) = X(c) + \sum_{c' \in \gamma(c)} \frac{X(c')}{d(c')},$$

όπου  $\gamma(c)$  συμβολίζει το σύνολο των κλήσεων της ακολουθίας σε κυψέλες γειτονικές της  $c$ . Για κάθε κλήση  $c' \notin A(\sigma)$ ,  $d(c')$  είναι ο αριθμός των κλήσεων



της  $A(\sigma)$  σε κυψέλες γειτονικές της κυψέλης της  $c'$ . Από τις δύο παραπάνω ισότητες, είναι προφανές ότι

$$B(\sigma) = \sum_{c \in A(\sigma)} \bar{b}(c).$$

Επομένως, μέσω της γραμμικότητας της μέσης τιμής,

$$\mathcal{E}[B(\sigma)] = \sum_{c \in A(\sigma)} \left( \mathcal{E} \left[ X(c) + \sum_{c' \in \gamma(c)} \frac{X(c')}{d(c')} \right] \right) \quad (3.5)$$

Έστω  $\gamma'(c)$  το σύνολο των κλήσεων σε κυψέλες γειτονικές της κυψέλης της  $c$  που εμφανίζονται πριν τη  $c$  στην ακολουθία  $\sigma$ . Προφανώς,  $\gamma'(c) \subseteq \gamma(c)$ , που συνεπάγεται ότι

$$\sum_{c' \in \gamma(c)} \frac{X(c')}{d(c')} \geq \sum_{c' \in \gamma'(c)} \frac{X(c')}{d(c')}.$$

Οπότε, (1) ισχύει

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[B(\sigma)] &\geq \sum_{c \in A(\sigma)} \left( \mathcal{E} \left[ X(c) + \sum_{c' \in \gamma'(c)} \frac{X(c')}{d(c')} \right] \right) \\ &\geq |A(\sigma)| \min_{c \in A(\sigma)} \left\{ \mathcal{E} \left[ X(c) + \sum_{c' \in \gamma'(c)} \frac{X(c')}{d(c')} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να φράξουμε από κάτω τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής

$$Y(c) = X(c) + \sum_{c' \in \gamma'(c)} \frac{X(c')}{d(c')},$$

για κάθε κλήση  $c \in A(\sigma)$ .

Εστιάζουμε την προσοχή μας σε μια κλήση  $c \in A(\sigma)$ . Έστω  $\Omega = 2^{\gamma'(c)}$  το σύνολο που περιέχει όλα τα πιθανά υποσύνολα του  $\gamma'(c)$ . Ορίζουμε ως *αποδοτική γειτονιά* της  $c$ , και συμβολίζουμε με  $\Gamma(c)$ , το υποσύνολο του  $\gamma'(c)$  που περιέχει τις κλήσεις του  $\gamma'(c)$  οι οποίες, όταν εμφανίζονται, δεν υπόκεινται σε κανέναν περιορισμό λόγω κλήσεων της ακολουθίας  $\sigma$  σε κυψέλες που βρίσκονται σε απόσταση 2 από την κυψέλη στην οποία εμφανίζεται η κλήση  $c$ . Προφανώς, η  $\Gamma(c)$  είναι μια τυχαία μεταβλητή που λαμβάνει τις τιμές της από

το δειγματοχώρο  $\Omega$ . Διαισθητικά, το αν μια βέλτιστη κλήση  $c$  γίνεται αποδεκτή από τον αλγόριθμο εξαρτάται από την αποδοτική γειτονιά  $\Gamma(c)$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[Y(c)] &= \sum_{\gamma \in \Omega} \left( \mathcal{E} \left[ X(c) + \sum_{c' \in \gamma} \frac{X(c')}{d(c')} | \Gamma(c) = \gamma \right] \cdot \Pr[\Gamma(c) = \gamma] \right) \\ &\geq \min_{\gamma \in \Omega} \left\{ \mathcal{E} \left[ X(c) + \sum_{c' \in \gamma} \frac{X(c')}{d(c')} | \Gamma(c) = \gamma \right] \right\} \\ &= \min_{\gamma \in \Omega} \left\{ \mathcal{E}[X(c) | \Gamma(c) = \gamma] + \mathcal{E} \left[ \sum_{c' \in \gamma} \frac{X(c')}{d(c')} | \Gamma(c) = \gamma \right] \right\} \quad (3.7) \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε την  $\mathcal{E}[X(c) | \Gamma(c) = \gamma]$ , παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος  $p$ -RANDOM μπορεί να κάνει αποδεκτή τη  $c$  μόνον αν έχει απορρίψει όλες τις κλήσεις στην αποδοτική γειτονιά της  $\gamma$ . Η πιθανότητα όλες οι κλήσεις της  $\gamma$  να απορριφθούν δεδομένου ότι  $\Gamma(c) = \gamma$  είναι  $(1-p)^{|\gamma|}$ , ενώ τότε η  $c$  γίνεται αποδεκτή με πιθανότητα  $p$ . Επομένως,

$$\mathcal{E}[X(c) | \Gamma(c) = \gamma] = p(1-p)^{|\gamma|}. \quad (3.8)$$

Το να φράζουμε από κάτω  $\mathcal{E} \left[ \sum_{c' \in \gamma} \frac{X(c')}{d(c')} | \Gamma(c) = \gamma \right]$  είναι πιο πολύπλοκο. Στις Ενότητες 3.3.1 και 3.3.2, θεωρούμε δύο περιπτώσεις αραιών δικτύων, δηλαδή, δίκτυα βαθμού τρία και τέσσερα.

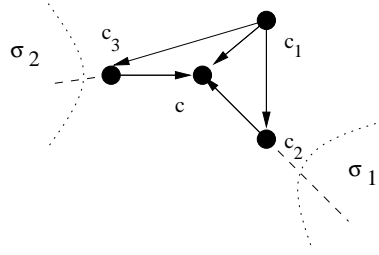
Από τη στιγμή που έχουμε υπολογίσει ένα κάτω φράγμα για την  $\mathcal{E}[Y(c)]$  για κάθε κλήση της  $c \in A(\sigma)$ , από τη σχέση (2) και τον ορισμό του συγκριτικού λόγου απόδοσης, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\rho(p)$  του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM:

$$\rho(p) \leq \left( \min_{c \in A(\sigma)} \mathcal{E}[Y(c)] \right)^{-1} \quad (3.9)$$

### 3.3.1 Ανάλυση του $p$ -RANDOM για δίκτυα βαθμού 3

Υποθέτουμε ότι οι κλήσεις της ακολουθίας  $\sigma$  εμφανίζονται στις κυψέλες ενός δικτύου με βαθμό τρία. Τότε, για κάθε κλήση  $c$  που γίνεται αποδεκτή από το βέλτιστο αλγόριθμο, θεωρούμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις για την αποδοτική γειτονιά της  $c$ . Μια περίπτωση παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.8. Η κλήση  $c$  είναι η κλήση που γίνεται αποδεκτή από το βέλτιστο αλγόριθμο. Η κλήση αυτή είναι γειτονική με τις κλήσεις  $c_1, c_2, c_3$ . Τα βέλη αναπαριστούν το χρόνο. Για παράδειγμα, το βέλος από την  $c_1$  στην  $c$  σημαίνει ότι η  $c_1$

εμφανίστηκε πριν τη  $c$ . Σημειώνουμε ότι σε μια σωστή περίπτωση δεν υπάρχει κατευθυνόμενος κύκλος στη γειτονιά της  $c$  και βέλη ανάμεσα στη  $c$  και τις γειτονικές της κλήσεις κατευθύνονται προς τη  $c$ .



Σχήμα 3.8: Μια περίπτωση για την αποδοτική γειτονιά μιας βέλτιστης κλήσης  $c$ .

Η ακολουθία  $\sigma$  που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.8 περιέχει επίσης τις υποακολουθίες  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ . Η συγκεκριμένη περίπτωση για τη  $c$  δε θα ληφθεί υπόψη στην ανάλυσή μας για τον εξής λόγο. Υποθέτουμε ότι ο βέλτιστος αλγόριθμος κάνει αποδεκτό το σύνολο των κλήσεων  $A(\sigma) = \{c\} \cup A(\sigma_1) \cup A(\sigma_2)$ , όπου  $A(\sigma_1)$  και  $A(\sigma_2)$  συμβολίζουν τα υποσύνολα του  $A(\sigma)$  που περιέχουν κλήσεις των  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ , αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι το σύνολο  $A'(\sigma) = \{c_3\} \cup A(\sigma_1) \cup A(\sigma_2)$  δεν περιέχει γειτονικές μεταξύ τους κλήσεις και, επιπλέον, έχει μέγεθος ίσο με το μέγεθος του συνόλου  $A(\sigma)$ . Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το  $A'(\sigma)$  είναι το σύνολο των βέλτιστων κλήσεων και να θεωρήσουμε μια πολύ πιο απλή περίπτωση για τη  $c_3$ . Έτσι, πετυχαίνουμε έναν άλλο περιορισμό για τις περιπτώσεις που πρέπει να λάβουμε υπόψη μας στην ανάλυση: η βέλτιστη κλήση έχει το πολύ μία γειτονική κλήση κοινή με κάποια από τις γειτονικές της κλήσεις. Σε ένα δίκτυο βαθμού τρία, οι έξι περιπτώσεις που πρέπει να λάβουμε υπόψη μας παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.9. Οι συμμετρικές περιπτώσεις παραλείπονται.

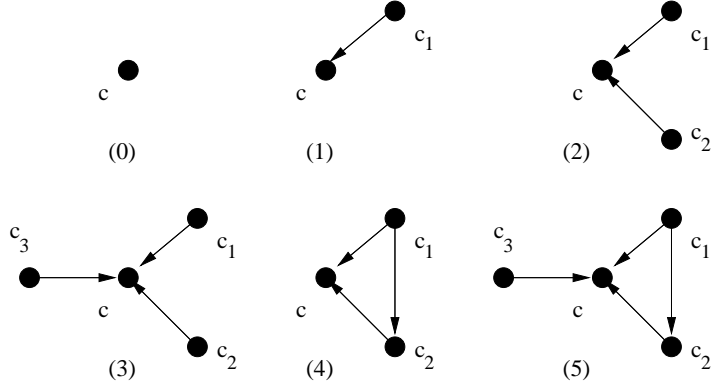
Συμβολίζουμε με  $B_i$  τη μέση τιμή της  $Y(c)$  δεδομένου ότι η αποδοτική γειτονιά της  $c$  ακολουθεί την περίπτωση  $\gamma_i$ , για  $i = 0, 1, \dots, 5$ .

Προφανώς, από την (3.4), έχουμε

$$B_0(c) = p \quad (3.10)$$

Για την περίπτωση  $\gamma_1$ , έχουμε ότι  $d(c_1) \leq 3$ , αφού το δίκτυο έχει μέγιστο βαθμό τρία. Προφανώς,  $\mathcal{E} \left[ \sum_{c' \in \gamma} \frac{X(c')}{d(c')} \mid \Gamma(c) = \gamma_1 \right] \geq p/3$  και, χρησιμοποιώντας την (3.4), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} B_1(c) &\geq p(1-p) + p/3 \\ &= 4p/3 - p^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$



Σχήμα 3.9: Οι έξι περιπτώσεις που πρέπει να λάβουμε υπόψη στην ανάλυση. (i) αντιστοιχεί στην περίπτωση  $\gamma_i$ .

Για την περίπτωση  $\gamma_2$ , έχουμε επίσης ότι  $d(c_1) \leq 3$  και  $d(c_2) \leq 3$  και  $\mathcal{E} \left[ \sum_{c' \in \gamma} \frac{X(c')}{d(c')} | \Gamma(c) = \gamma_2 \right] \geq 2p/3$ . Χρησιμοποιώντας την (3.4), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} B_2(c) &\geq p(1-p)^2 + 2p/3 \\ &= 5p/3 - 2p^2 + p^3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Για την περίπτωση  $\gamma_3$ , έχουμε ότι  $d(c_1) \leq 3$ ,  $d(c_2) \leq 3$ ,  $d(c_3) \leq 3$  και  $\mathcal{E} \left[ \sum_{c' \in \gamma} \frac{X(c')}{d(c')} | \Gamma(c) = \gamma_3 \right] \geq p$ . Χρησιμοποιώντας την (3.4), έχουμε

$$\begin{aligned} B_3(c) &\geq p(1-p)^3 + p \\ &= 2p - 3p^2 + 3p^3 - p^4 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Για την περίπτωση  $\gamma_4$ , έχουμε ότι  $d(c_1) \leq 2$  και  $d(c_2) \leq 2$ , αφού το δίκτυο έχει μέγιστο βαθμό τρία. Για να υπολογίσουμε την  $\mathcal{E} \left[ \sum_{c' \in \gamma} \frac{X(c')}{d(c')} | \Gamma(c) = \gamma_4 \right]$  παρατηρούμε ότι η  $c_1$  γίνεται αποδεκτή με πιθανότητα  $p$  ενώ η  $c_2$  γίνεται αποδεκτή με πιθανότητα  $p$  αν η  $c_1$  έχει ήδη απορριφθεί, δηλαδή, η πιθανότητα η  $c_2$  να γίνει αποδεκτή είναι  $p(1-p)$ . Επομένως,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left[ \sum_{c' \in \gamma} \frac{X(c')}{d(c')} | \Gamma(c) = \gamma_4 \right] &\geq p/2 + p(1-p)/2 \\ &= p - p^2/2 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.4), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} B_4(c) &\geq p(1-p)^2 + p - p^2/2 \\ &= 2p - 5p^2/2 + p^3 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Για την περίπτωση  $\gamma_5$ , έχουμε ότι  $d(c_1) \leq 2$ ,  $d(c_2) \leq 2$  και  $d(c_3) \leq 3$ , αφού το δίκτυο έχει μέγιστο βαθμό τρία. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω επιχειρηματολογία, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left[ \sum_{c' \in \gamma} \frac{X(c')}{d(c')} \mid \Gamma(c) = \gamma_5 \right] &\geq p/2 + p(1-p)/2 + p/3 \\ &= 4p/3 - p^2/2 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (4), έχουμε

$$\begin{aligned} B_4(c) &\geq p(1-p)^3 + 4p/3 - p^2/2 \\ &= 7p/3 - 7p^2/2 + 3p^3 - p^4 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Η μέση τιμή της  $Y(c)$  μπορεί να γραφτεί ως

$$\mathcal{E}[Y(c)] \geq \min_i B_i(c) \quad (3.16)$$

Κάνοντας πράξεις με τις (3.7)–(3.11), μπορούμε να δούμε ότι (αφού  $p \in [0, 1]$ )

$$B_1(c) \leq \min\{B_2(c), B_3(c), B_4(c), B_5(c)\}.$$

Για  $p \geq 1/3$  (που περιέχει τις τιμές της  $p$  για τις οποίες ενδιαφερόμαστε προκειμένου να βελτιώσουμε τα γνωστά αποτελέσματα), η (3.6) και η (3.7) δίνουν επίσης  $B_1(c) \leq B_0(c)$ . Επομένως, για  $p \in [1/3, 1]$ , η τιμή  $B_1(c)$  είναι ένα κάτω φράγμα για την  $\mathcal{E}[Y(c)]$  για κάθε κλήση  $c \in A(\sigma)$  που εξαρτάται μόνο από την  $p$ . Χρησιμοποιώντας την (3.5), έχουμε ότι για  $p \in [1/3, 1]$ , ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM είναι

$$\rho(p) \leq \frac{3}{4p - 3p^2}.$$

Το δεξί μέρος της παραπάνω ανισότητας ελαχιστοποιείται για  $p = 2/3$  στην τιμή  $9/4$ . Καταλήγουμε στο ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 13.** Υπάρχει *on-line* πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου κλήσεων με συγκριτικό λόγο απόδοσης  $9/4$  για αραιά ασύρματα κυψελικά δίκτυα βαθμού τρία που υποστηρίζουν μία συχνότητα.

Χρησιμοποιώντας της τεχνική των Awerbuch και άλλων, μπορούμε να μετατρέψουμε τον αλγόριθμο αυτό κατάλληλα ώστε να δουλεύει και για πολλές συχνότητες. Επιτυγχάνουμε το ακόλουθο συμπέρασμα.

**Συμπέρασμα 14.** Υπάρχει *on-line* πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου κλήσεων με συγκριτικό λόγο απόδοσης  $2.787$  για αραιά ασύρματα κυψελικά δίκτυα βαθμού τρία που υποστηρίζουν πολλές συχνότητες.

### 3.3.2 Ανάλυση του $p$ -RANDOM για δίκτυα βαθμού 4

Στην ενότητα αυτή περιγράφουμε περιληπτικά την απόδειξη για το συγκριτικό λόγο απόδοσης του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM για δίκτυα με βαθμό τέσσερα. Υποθέτουμε ότι οι κλήσεις της ακολουθίας  $\sigma$  εμφανίζονται στις κυψέλες ενός δικτύου με βαθμό τέσσερα. Πάλι, για κάθε κλήση  $c$  που γίνεται αποδεκτή από το βέλτιστο αλγόριθμο, θεωρούμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις για την αποδοτική γειτονιά της  $c$ . Αυτές οι περιπτώσεις κατασκευάζονται όπως και στην προηγούμενη ενότητα και τώρα ισχύουν οι ακόλουθοι περιορισμοί :

- Το πολύ τέσσερις κλήσεις εμφανίζονται πριν τη  $c$ .
- Δεν υπάρχει κατευθυνόμενος κύκλος στη γειτονιά της  $c$  και τα βέλη ανάμεσα στη  $c$  και τις γειτονικές της κλήσεις κατευθύνονται προς τη  $c$ .
- Η βέλτιστη κλήση  $c$  έχει το πολύ δύο κοινές γειτονικές κλήσεις με κάθε μία από τις γειτονικές της κλήσεις.

Σε ένα δίκτυο βαθμού τέσσερα, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας είκοσι τρεις περιπτώσεις αντί για έξι που μελετήσαμε για δίκτυα βαθμού τρία. Θα αναφέρουμε ενδεικτικά μία από αυτές τις περιπτώσεις. Συμβολίζουμε με  $B'_i(c)$  τη μέση τιμή της  $Y(c)$  δεδομένου ότι η αποδοτική γειτονιά της  $c$  ακολουθεί την περίπτωση  $\gamma'_i$ , για  $i = 0, 1, \dots, 22$ . Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή της  $B'_4(c)$  οφ  $Y(c)$  δεδομένου ότι η αποδοτική γειτονιά της  $c$  ακολουθεί την περίπτωση  $\gamma'_4$  που είναι η ίδια με την περίπτωση  $\gamma_4$  του Σχήματος 3.9.

Έχουμε ότι  $d(c_1) \leq 3$  και  $d(c_2) \leq 3$ , αφού το δίκτυο έχει μέγιστο βαθμό τέσσερα. Για να υπολογίσουμε την  $\mathcal{E} \left[ \sum_{c' \in \gamma} \frac{X(c')}{d(c')} | \Gamma(c) = \gamma'_4 \right]$ , παρατηρούμε ότι η  $c_1$  γίνεται αποδεκτή με πιθανότητα  $p$  ενώ η  $c_2$  γίνεται αποδεκτή με πιθανότητα  $p$  αν η  $c_1$  έχει ήδη απορριφθεί, δηλαδή, η πιθανότητα η  $c_2$  να γίνει αποδεκτή είναι  $p(1-p)$ . Επομένως,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left[ \sum_{c' \in \gamma} \frac{X(c')}{d(c')} | \Gamma(c) = \gamma_4 \right] &\geq p/3 + p(1-p)/3 \\ &= 2p/3 - p^2/3 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.4), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} B'_4(c) &\geq p(1-p)^2 + 2p/3 - p^2/3 \\ &= 5p/3 - 7p^2/3 + p^3 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρηματολογία με την Ενότητα 3.3.1, εξετάζοντας όλες τις περιπτώσεις, μπορούμε να δούμε ότι, για κάποιες τιμές της  $p$ ,

είναι  $B'_4(c) = \min_i B'_i(c)$ . Επομένως, για τις συγκεκριμένες τιμές της  $p$ , η τιμή  $B'_4(c)$  αποτελεί ένα κάτω φράγμα για την  $\mathcal{E}[Y(c)]$  για κάθε κλήση  $c \in A(\sigma)$  που εξαρτάται μόνο από την  $p$ . Χρησιμοποιώντας την (3.5), έχουμε ότι για τις συγκεκριμένες τιμές της  $p$ , ο συγκριτικός λόγος απόδοσης  $\rho'(p)$  του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM είναι

$$\rho'(p) \leq \frac{3}{5p - 7p^2 + 3p^3}.$$

Το δεξί μέρος της παραπάνω ανισότητας ελαχιστοποιείται για  $p = 5/9$  στην τιμή  $729/275 = 2.651$ . Καταλήγουμε στο ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 15.** *Υπάρχει on-line πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου κλήσεων με συγκριτικό λόγο απόδοσης 2.651 για αραιά ασύρματα κυψελικά δίκτυα βαθμού τέσσερα που υποστηρίζουν μία συχνότητα.*

Το φράγμα αυτό συμπίπτει με το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα για ιδεατά ασύρματα κυψελικά δίκτυα που έχουμε ήδη αναφέρει [13]. Χρησιμοποιώντας την τεχνική των Awerbuch et al., μπορούμε να μετατρέψουμε τον αλγόριθμο αυτό κατάλληλα ώστε να δουλεύει και για πολλές συχνότητες. Επιτυγχάνουμε το ακόλουθο συμπέρασμα.

**Συμπέρασμα 16.** *Υπάρχει on-line πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου κλήσεων με συγκριτικό λόγο απόδοσης 3.182 για αραιά ασύρματα κυψελικά δίκτυα βαθμού τέσσερα που υποστηρίζουν πολλές συχνότητες.*

### 3.4 Ανάλυση του αλγορίθμου $p$ -RANDOM για αυθαίρετα δίκτυα

Επεκτείνουμε τώρα την ανάλυση του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM σε αυθαίρετα δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα. Εκφράζουμε το αποτέλεσμα συναρτήσει το μέγιστου βαθμού  $\Delta$  του δικτύου. Οι Pantziou και άλλοι [52] μελετούν τη συγκριτική απόδοση του αλγορίθμου  $\frac{1}{\Delta}$ -RANDOM στη μέση περίπτωση, και αποδεικνύουν ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσής του όταν εκτελείται για ακολουθίες κλήσεων που δημιουργούνται σύμφωνα με συγκεκριμένες πιθανοτικές κατανομές είναι κατά πολύ μικρότερος από το μέσο βαθμό του δικτύου. Χρησιμοποιώντας ένα απλό πιθανοτικό επιχείρημα θα αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 17.** *Για κάθε δίκτυο με μέγιστο βαθμό  $\Delta \geq 2$ , υπάρχει ένας πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων με συγκριτικό λόγο απόδοσης  $27\Delta/28$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.*

Απόδειξη. Έστω  $G$  ένα δίκτυο με μέγιστο βαθμό  $\Delta$ . Θεωρούμε την εκτέλεση του αλγορίθμου  $p$ -RANDOM (με  $1/\Delta < p \leq 1$ ) για μια ακολουθία κλήσεων  $\sigma$  στο δίκτυο  $G$ . Σύμφωνα με τους συμβολισμούς του Θεωρήματος 7, έχουμε ότι το μέσο καταναμημένο κέρδος για κάθε κλήση  $c$  που γίνεται αποδεκτή από το βέλτιστο αλγόριθμο είναι

$$\mathcal{E}[\bar{b}(c)] \geq X(c) + \frac{\sum_{c' \in \gamma'(c)} X(c')}{\Delta},$$

ενώ το μέσο κέρδος το αλγορίθμου όταν εκτελείται για την ακολουθία  $\sigma$  δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{E}[B(\sigma)] = \sum_{c \in A(\sigma)} \mathcal{E}[\bar{b}(c)].$$

Έστω  $q(c)$  η πιθανότητα να είναι  $\sum_{c' \in \gamma'(c)} X(c') = 0$ , δηλαδή, καμιά κλήση στη γειτονιά της κλήσης  $c$  να μην εξυπηρετηθεί. Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\bar{b}(c)] &\geq q(c)p + \frac{1 - q(c)}{\Delta} \\ &= q(c) \left( p - \frac{1}{\Delta} \right) + \frac{1}{\Delta}. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι  $q(c) \geq (1 - p)^\Delta$ , για κάθε κλήση  $c \in \sigma$ . Επομένως,

$$\mathcal{E}[\bar{b}(c)] \geq (1 - p)^\Delta \left( p - \frac{1}{\Delta} \right) + \frac{1}{\Delta}.$$

Το δεξί τμήμα της έκφρασης μεγιστοποιείται για  $p = \frac{2}{\Delta+1}$ . Στην περίπτωση αυτή, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\bar{b}(c)] &\geq \left( 1 - \frac{2}{\Delta+1} \right)^\Delta \left( \frac{2}{\Delta+1} - \frac{1}{\Delta} \right) + \frac{1}{\Delta} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left( \left( 1 - \frac{2}{\Delta+1} \right)^{\Delta+1} + 1 \right) \\ &\geq \frac{1}{\Delta} \left( \frac{1}{27} + 1 \right) \\ &= \frac{28}{27\Delta} \end{aligned}$$



Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι <sup>1</sup>, για το κέρδος του αλγορίθμου  $\frac{2}{\Delta+1}$ -RANDOM, ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$B_{OPT}(\sigma) \leq \frac{27\Delta}{28} \mathcal{E}[B(\sigma)].$$

Και έτσι προκύπτει το Θεώρημα.  $\square$

Σημειώνουμε ότι από το θεώρημα 17 των Awerbuch και άλλων [1], συνεπάγεται η ύπαρξη ενός πιθανοτικού αλγορίθμου ελέγχου αποδοχής κλήσεων για αυθαίρετα πολλές συχνότητες με συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ  $27\Delta/28 + 1$ .

Θεωρούμε τώρα ένα δίκτυο με γράφημα παρεμβολών  $G$  και έστω  $\gamma(G)$  το μέγεθος του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου στη γειτονιά κάθε κορυφής. Όπως είδαμε στην Ενότητα 3.1, σε κάθε δίκτυο, η τιμή  $\gamma(G)$  αποτελεί ένα κάτω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης κάθε ντετερμινιστικού αλγορίθμου. Εισάγοντας την τιμή  $|\gamma(G)|$  στην απόδειξη του Θεωρήματος 17, καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα.

**Συμπέρασμα 18.** Για κάθε δίκτυο που υποστηρίζει μία συχνότητα με  $\gamma(G) \geq 2$  και  $1/2 < p < 1$ , ο αλγόριθμος  $p$ -RANDOM έχει (αυστηρά) καλύτερο συγκριτικό λόγο απόδοσης από κάθε ντετερμινιστικό αλγόριθμο.

Προφανώς, αν  $\gamma(G) = 1$  ή  $\gamma(G) = 0$ , ο άπληστος ντετερμινιστικός αλγόριθμος είναι βέλτιστος.

### 3.5 Ένας απλός αλγόριθμος με συγκριτικό λόγο απόδοσης $8/3$

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο CRS-A, έναν απλό πιθανοτικό on-line αλγόριθμο ελέγχου αποδοχής κλήσεων σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2. Ο αλγόριθμος δουλεύει σε δίκτυα με μία συχνότητα και έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη που είναι παραπλήσιο (αλλά ελαφρώς χειρότερο) από αυτόν που επιτυγχάνεται από τον αλγόριθμο  $p$ -RANDOM.

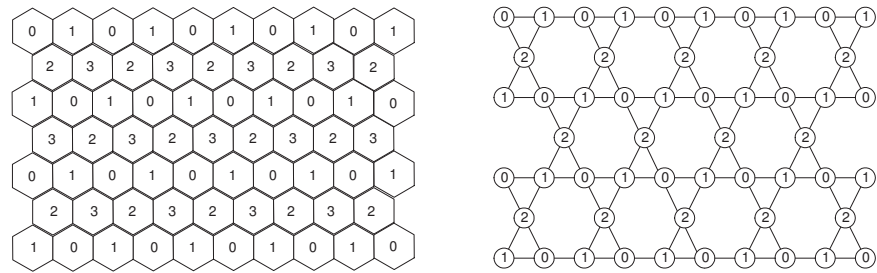
<sup>1</sup> Παρατηρούμε ότι οι ανισότητες για την  $\mathcal{E}[\bar{b}(c)]$  συνεπάγονται ότι

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta \mathcal{E}[\bar{b}(c)] = 1 + e^{-2}.$$

Επομένως, για γραφήματα με αρκετά μεγάλο μέγιστο βαθμό  $\Delta$ , ο αλγόριθμος  $\frac{2}{\Delta+1}$ -RANDOM έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ  $(0.8808 + \epsilon)\Delta$  για κάποιο μικρό  $\epsilon > 0$ .

Ο αλγόριθμος CRS-A χρησιμοποιεί έναν χρωματισμό των κυψελών με τέσσερα χρώματα 0, 1, 2, και 3, έτσι ώστε μόνο δύο χρώματα να χρησιμοποιούνται στις κυψέλες που ανήκουν στον ίδιο άξονα. Αυτό μπορεί να γίνει χρωματίζοντας τις κυψέλες στον ίδιο x-άξονα είτε με τα χρώματα 0 και 1 είτε με τα χρώματα 2 και 3, και τις κυψέλες στον ίδιο y-άξονα είτε με τα χρώματα 0 και 2 είτε με τα χρώματα 1 και 3, και τις κυψέλες στο ίδιο z-άξονα είτε με τα χρώματα 0 και 3 είτε με τα χρώματα 1 και 2. Ένας τέτοιος χρωματισμός φαίνεται αριστερά στο Σχήμα 3.10.

Ο αλγόριθμος CRS-A τυχαία επιλέγει ένα από τα τέσσερα χρώματα και εκτελεί τον άπληστο αλγόριθμο στις κυψέλες που είναι χρωματισμένες με τα υπόλοιπα τρία χρώματα, αγνοώντας (δηλ., απορρίπτοντας) όλες τις κλήσεις σε κυψέλες που έχουν χρωματιστεί με το χρώμα που επιλέχθηκε.



Σχήμα 3.10: Ο 4-χρωματισμός που χρησιμοποιείται από τον αλγόριθμο CRS-A και το αντίστοιχο υπογράφημα του γραφήματος παρεμβολών που σχηματίζεται από κορυφές που δεν έχουν χρωματιστεί με το χρώμα 3.

**Θεώρημα 19.** *Ο αλγόριθμος CRS-A σε κυβελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2 που υποστηρίζουν μία συχνότητα έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $8/3$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.*

*Απόδειξη.* Έστω μια ακολουθία κλήσεων  $\sigma$  και  $O$  το σύνολο των κλήσεων που γίνονται δεκτές από το βέλτιστο αλγόριθμο. Έστω  $\sigma'$  το σύνολο των κλήσεων σε κυψέλες που δεν έχουν χρωματιστεί με το επιλεγμένο χρώμα και έστω  $O'$  το σύνολο των κλήσεων που θα είχε δεχτεί ο βέλτιστος αλγόριθμος με είσοδο  $\sigma'$ . Προφανώς, το  $|O'|$  θα είναι τουλάχιστο όσο και το μέγεθος του υποσυνόλου του  $O$  που ανήκει στη  $\sigma'$ . Αφού η πιθανότητα η κυψέλη μιας κλήσης του  $O$  να μην είναι χρωματισμένη με το επιλεγμένο χρώμα είναι  $3/4$ , ισχύει  $E[|O'|] \geq \frac{3}{4}|O|$ . Έστω τώρα  $B$  το σύνολο των κλήσεων που γίνονται δεκτές από τον αλγόριθμο CRS-A, δηλ., το σύνολο των κλήσεων που γίνονται δεκτές από τον άπληστο αλγόριθμο όταν εκτελείται για την ακολουθία  $\sigma'$ . Παρατηρούμε ότι κάθε κλήση στο  $O'$  είτε ανήκει στο  $B$  είτε απορρίπτεται γιατί κάποια άλλη κλήση έχει γίνει

αποδεκτή. Επιπλέον, μια κλήση του  $B \setminus O'$  μπορεί να προκαλέσει την απόρριψη το πολύ δύο κλήσεων του  $O'$ . Αυτό σημαίνει ότι  $|B| \geq |O'|/2$  που συνεπάγεται ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγορίθμου CRS-A είναι

$$\frac{|O|}{\varepsilon[|B|]} \leq \frac{2|O|}{\varepsilon[|O'|]} \leq \frac{8}{3}.$$

□

Το βασικό πλεονέκτημα του αλγορίθμου CRS-A είναι το ότι χρησιμοποιεί μόνο δύο τυχαία δυαδικά ψηφία. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε απλούς on-line αλγόριθμους με βελτιωμένους συγκριτικούς λόγους απόδοσης που χρησιμοποιούν ελαφρώς ισχυρότερες πηγές τυχαιότητας και δουλεύουν σε δίκτυα με αυθαίρετα πολλές συχνότητες.

### 3.6 Αλγόριθμοι “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής”

Ο αλγόριθμος CRS-A βασίζεται στον αλγόριθμο “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής”. Χρησιμοποιεί ένα χρωματισμό του γραφήματος παρεμβολών (χωρίς απαραίτητα να χρησιμοποιεί τον ελάχιστο δυνατό αριθμό χρωμάτων) και μια κατηγοριοποίηση των χρωμάτων. Ο αλγόριθμος αρχικά επιλέγει τυχαία μια χρωματική κλάση (δηλαδή, ένα σύνολο χρωμάτων) και στη συνέχεια εκτελεί τον άπληστο αλγόριθμο στις κυψέλες που είναι χρωματισμένες με χρώματα από την επιλεγμένη χρωματική κλάση, αγνοώντας (δηλαδή, απορρίπτοντας) κλήσεις σε κυψέλες χρωματισμένες με χρώματα που δεν ανήκουν στη συγκεκριμένη χρωματική κλάση. Ο αλγόριθμος CRS-A χρησιμοποιεί για το γράφημα παρεμβολών ένα χρωματισμό με τέσσερα χρώματα 0, 1, 2, και 3, και τέσσερις χρωματικές κλάσεις  $\{0, 1, 2\}$ ,  $\{0, 1, 3\}$ ,  $\{0, 2, 3\}$ , και  $\{1, 2, 3\}$ . Σημειώνουμε ότι, στους προηγούμενους γνωστούς αλγόριθμους που βασίζονται στο παράδειγμα “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής”, οι χρωματικές κλάσεις είναι μονοσύνολα (π.χ.,  $[2]$ ,  $[52]$ ).

Το ακόλουθο απλό λήμμα παρέχει μια επαρκή συνθήκη ώστε να μπορούν να επιτευχθούν αποδοτικοί on-line αλγόριθμοι με βάση το παράδειγμα “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής”.

**Λήμμα 20.** Θεωρούμε ένα δίκτυο με γράφημα παρεμβολών  $G = (V, E)$  που υποστηρίζει  $w$  συχνότητες και έστω  $\chi$  ένας χρωματισμός των κορυφών του  $V$  με χρώματα από ένα σύνολο  $X$ . Αν υπάρχουν  $\nu$  σύνολα χρωμάτων  $s_0, s_1, \dots, s_{\nu-1} \subseteq X$  και ένας ακέραιος  $\lambda$  έτσι ώστε

- κάθε χρώμα του  $X$  να ανήκει σε τουλάχιστο  $\lambda$  διαφορετικά από σύνολα  $s_0, s_1, \dots, s_{\nu-1}$ , και

- για  $i = 0, 1, \dots, \nu - 1$ , κάθε συνεκτική συνιστώσα του υπογραφήματος του  $G$  που σχηματίζεται από τις κορυφές που έχουν χρωματιστεί με χρώματα του συνόλου  $s_i$  είναι κλίκια,

τότε υπάρχει ένας *on-line* πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων για το δίκτυο  $G$  που έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\nu/\lambda$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.

*Απόδειξη.* Θεωρούμε ένα δίκτυο με γράφημα παρεμβολών  $G$  το οποίο υποστηρίζει  $w$  συχνότητες και έναν πιθανοτικό *on-line* αλγόριθμο που δουλεύει ως εξής. Επιλέγει τυχαία μία από τις  $\nu$  χρωματικές κλάσεις  $s_0, \dots, s_{\nu-1}$  και εκτελεί τον άπληστο αλγόριθμο για τις κυψέλες που είναι χρωματισμένες με χρώματα από την επιλεγμένη χρωματική κλάση, απορρίπτοντας όλες τις κλήσεις σε κυψέλες που δεν είναι χρωματισμένες με χρώματα της επιλεγμένης χρωματικής κλάσης.

Έστω  $\sigma$  μια ακολουθία κλήσεων και  $O$  το σύνολο των κλήσεων που γίνονται δεκτές από το βέλτιστο αλγόριθμο όταν αυτός εκτελείται για την ακολουθία  $\sigma$ . Υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος επιλέγει τη χρωματική κλάση  $s_i$ . Έστω  $\sigma'$  η ακολουθία των κλήσεων στις κυψέλες που είναι χρωματισμένες με χρώματα της κλάσης  $s_i$  και  $O'$  το σύνολο των κλήσεων που γίνονται δεκτές από το βέλτιστο αλγόριθμο όταν αυτός εκτελείται για την ακολουθία  $\sigma'$ . Συμβολίζουμε με  $B$  το σύνολο των κλήσεων που γίνονται δεκτές από τον αλγόριθμο. Κατ' αρχήν μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι  $|B| = |O'|$ . Έστω  $G_j$  μια συνεκτική συνιστώσα του υπογραφήματος του  $G$  που σχηματίζεται από τις κορυφές του  $G$  που είναι χρωματισμένοι με χρώματα της κλάσης  $s_i$ . Έστω  $\sigma_j$  η υπακολουθία της  $\sigma'$  που αποτελείται από κλήσεις στις κυψέλες που αντιστοιχούν στις κορυφές του  $G_j$ . Προφανώς, κάθε αλγόριθμος (συμπεριλαμβανομένου του βέλτιστου) εξυπηρετήσει το πολύ μία κλήση της  $\sigma_j$  σε κάθε συχνότητα. Αν ο βέλτιστος αλγόριθμος αποδέχεται  $w$  κλήσεις, αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία  $\sigma_j$  περιέχει τουλάχιστον  $w$  κλήσεις και ο άπληστος αλγόριθμος, όταν εκτελείται για την ακολουθία  $\sigma'$ , θα κάνει αποδεκτές  $w$  κλήσεις της  $\sigma_j$  (μία κλήση σε κάθε μία από τις διαθέσιμες συχνότητες). Αν ο βέλτιστος αλγόριθμος αποδέχεται  $w' < w$  κλήσεις της  $\sigma_j$ , αυτό σημαίνει ότι η  $\sigma_j$  αποτελείται ακριβώς από  $w' < w$  κλήσεις και ο άπληστος αλγόριθμος θα τις εξυπηρετήσει όλες σε  $w'$  διαφορετικές συχνότητες. Επειδή μια κλήση της  $\sigma_j$  δεν υφίσταται περιορισμούς από κλήσεις της  $\sigma_{j'}$  για  $j \neq j'$ , καταλήγουμε στο ότι  $|B| = |O'|$ .

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με την παρατήρηση ότι το μέσο κέρδος του βέλτιστου αλγορίθμου όταν αυτός εκτελείται για κάθε πιθανή ακολουθία κλήσεων  $\sigma'$  που καθορίζεται μέσω της τυχαίας επιλογής του αλγορίθμου είναι  $E[|O'|] \geq \frac{w}{\lambda} |O|$ , αφού, για κάθε κλήση του συνόλου  $O$ , η πιθανότητα το χρώμα της κυψέλης της να ανήκει στην επιλεγμένη χρωματική κλάση είναι τουλάχιστον  $\nu/\lambda$ . Επομένως, ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγορίθμου απέναντι

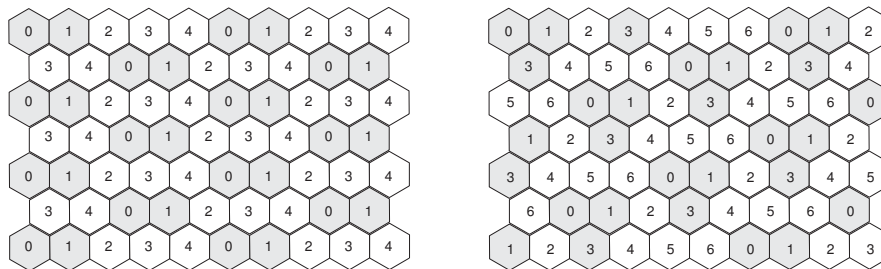
σε αντιπάλους χωρίς μνήμη είναι

$$\frac{|O|}{\mathcal{E}[|B|]} = \frac{|O|}{\mathcal{E}[|O'|]} \leq \lambda/\nu.$$

□

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε δύο πιθανοτικούς on-line αλγορίθμους ελέγχου αποδοχής κλήσεων για κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2, τους CRS-B και CRS-C, οι οποίοι επίσης βασίζονται στον αλγόριθμο “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής” και πετυχαίνουν ακόμα καλύτερους συγκριτικούς λόγους απόδοσης.

Θεωρούμε ένα χρωματισμό των κυψελών με πέντε χρώματα 0, 1, 2, 3, και 4 έτσι ώστε για κάθε  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , και για κάθε κυψέλη που είναι χρωματισμένη με το χρώμα  $i$ , οι δύο γειτονικές της κυψέλες στον άξονα  $x$  να χρωματίζονται με τα χρώματα  $(i - 1) \bmod 5$  και  $(i + 1) \bmod 5$ , ενώ οι υπόλοιπες τέσσερις γειτονικές της κυψέλες να χρωματίζονται με τα χρώματα  $(i + 2) \bmod 5$  και  $(i + 3) \bmod 5$ . Ένας τέτοιος χρωματισμός φαίνεται αριστερά στο Σχήμα 3.11. Επίσης, ορίζουμε σαν  $s_i = \{i, (i + 1) \bmod 5\}$ , για  $i = 0, 1, \dots, 4$ . Παρατηρούμε ότι, για κάθε  $i = 0, 1, \dots, 4$ , κάθε ζεύγος γειτονικών κυψελών που είναι χρωματισμένες με τα χρώματα  $i$  και  $(i + 1) \bmod 5$  είναι γειτονικό με κυψέλες που είναι χρωματισμένες με τα χρώματα  $(i + 2) \bmod 5$ ,  $(i + 3) \bmod 5$ , και  $(i + 4) \bmod 5$ , δηλαδή, με χρώματα που δεν ανήκουν στην κλάση  $s_i$ . Επομένως, ο χρωματισμός  $\chi$  και οι χρωματικές κλάσεις  $s_i$  πληρούν τις συνθήκες που ορίζονται στο Λήμμα 20 για  $\nu = 5$  και  $\lambda = 2$ . Καλούμε CRS-B τον αλγόριθμο που χρησιμοποιεί αυτό το χρωματισμό και λειτουργεί σύμφωνα με το παράδειγμα “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής” όπως στην απόδειξη του Λήμματος 20. Καταλήγουμε στο ακόλουθο Θεώρημα.



Σχήμα 3.11: Ο 5-χρωματισμός που χρησιμοποιείται από τον αλγόριθμο CRS-B και ο 7-χρωματισμός που χρησιμοποιείται από τον CRS-C. Οι σκιασμένες κυψέλες είναι εκείνες που έχουν χρωματιστεί με χρώματα στο σύνολο  $s_0$ .

**Θεώρημα 21.** *Ο αλγόριθμος CRS-B σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2 έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $5/2$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.*

Θεωρούμε τώρα έναν χρωματισμό των κυψελών με επτά χρώματα  $0, 1, \dots, 6$  έτσι ώστε για κάθε κυψέλη που έχει χρωματιστεί με το χρώμα  $i$  (για  $i = 0, \dots, 6$ ), οι δύο γειτονικές της κυψέλες στον άξονα  $x$  να είναι χρωματισμένες με τα χρώματα  $(i - 1) \bmod 7$  και  $(i + 1) \bmod 7$ , ενώ οι δύο γειτονικές της κυψέλες στον άξονα  $z$  να είναι χρωματισμένες με τα χρώματα  $(i - 3) \bmod 7$  και  $(i + 3) \bmod 7$ . Ένας τέτοιος χρωματισμός φαίνεται δεξιά στο Σχήμα 3.11. Ορίζουμε  $s_i = \{i, (i + 1) \bmod 7, (i + 3) \bmod 7\}$ , για  $i = 0, 1, \dots, 6$ . Παρατηρούμε ότι για κάθε  $i = 0, 1, \dots, 6$ , κάθε τρίγωνο που ορίζεται από κυψέλες που είναι χρωματισμένες με τα χρώματα  $i, (i + 1) \bmod 7$ , και  $(i + 3) \bmod 7$  είναι γειτονικό με κυψέλες που έχουν λάβει τα χρώματα  $(i + 2) \bmod 7, (i + 4) \bmod 7, (i + 5) \bmod 7$ , και  $(i + 6) \bmod 7$ , δηλ., χρώματα που δεν ανήκουν στο σύνολο  $s_i$ . Επομένως, ο χρωματισμός  $\chi$  και οι χρωματικές κλάσεις  $s_i$  ικανοποιούν τις συνθήκες του Λήμματος 20 για  $\nu = 7$  και  $\lambda = 3$ . Καλούμε CRS-C τον αλγόριθμο που χρησιμοποιεί τον παραπάνω χρωματισμό και δουλεύει σύμφωνα με τον αλγόριθμο “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής” που παρουσιάσαμε για την απόδειξη του Λήμματος 20. Καταλήγουμε στο ακόλουθο Θεώρημα.

**Θεώρημα 22.** *Ο αλγόριθμος CRS-C σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2 έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $7/3$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.*

Οι δύο παραπάνω αλγόριθμοι (CRS-B και CRS-C) χρησιμοποιούν μια πηγή τυχαιότητας η οποία επιλέγει ισοπίθανα ένα από έναν περιττό αριθμό διακριτών αντικειμένων. Αν διαθέτουμε μόνο έναν αριθμό νομισμάτων (τυχαία δυαδικά ψηφία), μπορούμε να σχεδιάσουμε αλγόριθμους με μικρό συγκριτικό λόγο απόδοσης συνδυάζοντας τους προηγούμενους αλγόριθμους. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας 6 τυχαία δυαδικά ψηφία, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο. Χρησιμοποιούμε τους ακέραιους  $0, 1, \dots, 63$  για να προσδιορίσουμε καθένα από τα 63 αποτελέσματα των 6 τυχαίων δυαδικών ψηφίων. Για κάθε αποτέλεσμα  $i \in \{0, \dots, 49\}$ , εκτελείται ο αλγόριθμος CRS-B χρησιμοποιώντας τις χρωματικές κλάσεις  $s_{i \bmod 5}$ , ενώ για κάθε αποτέλεσμα  $i \in \{50, \dots, 63\}$ , εκτελείται ο αλγόριθμος CRS-C χρησιμοποιώντας τις χρωματικές κλάσεις  $s_{(i-50) \bmod 7}$ . Αυτός ο αλγόριθμος έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $32/13 \approx 2.462$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη, αφού το μέσο κέρδος του είναι τουλάχιστον  $50/64 \cdot 2/5 + 14/64 \cdot 3/7 = 13/32$  φορές το κέρδος του βέλτιστου αλγόριθμου. Όμοια, χρησιμοποιώντας 8 τυχαία δυαδικά ψηφία, κατασκευάζουμε έναν on-line αλγόριθμο με συγκριτικό λόγο απόδοσης

$64/27 \approx 2.37$ . Γενικεύοντας αυτή την ιδέα, για αρκετά μικρό  $\epsilon > 0$ , μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο που χρησιμοποιεί  $t = O(\log 1/\epsilon)$  τυχαία δυαδικά ψηφία, και, για τα  $2^t \bmod 7$  από τα  $2^t$  αποτελέσματά τους, δεν κάνει τίποτα, ενώ για τα υπόλοιπα αποτελέσματα εκτελείται ο αλγόριθμος CRS-C. Με τον τρόπο αυτό, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα.

**Συμπέρασμα 23.** Για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει ένας on-line πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων για κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2 που χρησιμοποιεί  $O(\log 1/\epsilon)$  τυχαία δυαδικά ψηφία και έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ  $7/3 + \epsilon$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.

### 3.7 Δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης $k > 2$

Για κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k > 2$ , παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο CRS- $k$  που βασίζεται στο παράδειγμα “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής”. Ο αλγόριθμος CRS- $k$  χρησιμοποιεί τον ακόλουθο χρωματισμό για το γράφημα παρεμβολών ενός κυψελικού δικτύου με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k$ . Οι κυψέλες χρωματίζονται με τα χρώματα  $0, 1, \dots, 3k^2 - 3k$  έτσι ώστε για κάθε κυψέλη που χρωματίζεται με το χρώμα  $i$ , οι γειτονικές της κυψέλες στον άξονα  $x$  χρωματίζονται με τα χρώματα  $(i-1) \bmod (3k^2 - 3k + 1)$  και  $(i+1) \bmod (3k^2 - 3k + 1)$ , ενώ οι γειτονικές της κυψέλες στον άξονα  $z$  χρωματίζονται με τα χρώματα  $(i - 3(k-1)^2) \bmod (3k^2 - 3k + 1)$  και  $(i + 3(k-1)^2) \bmod (3k^2 - 3k + 1)$ .

Για περιττό  $k$ , και για κάθε  $i = 0, 1, \dots, 3k^2 - 3k$ , η χρωματική κλάση  $s_i$  περιέχει τα ακόλουθα χρώματα. Για κάθε  $j = 0, 1, \dots, \frac{k-1}{2}$ , περιέχει τα χρώματα  $(i + 3j(k-1)^2 - j) \bmod (3k^2 - 3k + 1)$ , ...,  $(i + 3j(k-1)^2 + \frac{k-1}{2}) \bmod (3k^2 - 3k + 1)$ , και για κάθε  $j = \frac{k+1}{2}, \dots, k-1$ , περιέχει τα χρώματα  $(i + \frac{3(k-1)^3}{2} + 3(j - \frac{k-1}{2})(k-1)^2 - \frac{k-1}{2}) \bmod (3k^2 - 3k + 1)$ , ...,  $(i + \frac{3(k-1)^3}{2} + 3(j - \frac{k-1}{2})(k-1)^2 + k - 1 - j) \bmod (3k^2 - 3k + 1)$ .

Για άρτιο  $k$ , και για κάθε  $i = 0, 1, \dots, 3k^2 - 3k$ , η χρωματική κλάση  $s_i$  περιέχει τα ακόλουθα χρώματα. Για κάθε  $j = 0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 1$ , περιέχει τα χρώματα  $(i + 3j(k-1)^2 - j) \bmod (3k^2 - 3k + 1)$ , ...,  $(i + 3j(k-1)^2 + \frac{k}{2}) \bmod (3k^2 - 3k + 1)$ , και για κάθε  $j = \frac{k}{2}, \dots, k-1$ , περιέχει τα χρώματα  $(i + 3(\frac{k}{2} - 1)(k-1)^2 + 3(j - \frac{k}{2} + 1)(k-1)^2 - \frac{k}{2} + 1) \bmod (3k^2 - 3k + 1)$ , ...,  $(i + 3(\frac{k}{2} - 1)(k-1)^2 + 3(j - \frac{k}{2} + 1)(k-1)^2 + k - 1 - j) \bmod (3k^2 - 3k + 1)$ .

Παρατηρούμε ότι, για  $k = 2$ , προκύπτει ο χρωματισμός που χρησιμοποιείται από τον αλγόριθμο CRS-C. Παραδείγματα χρωματισμών για  $k = 3$  και  $k = 4$

καθώς επίσης και οι κυψέλες που χρωματίζονται με χρώματα της χρωματικής κλάσης  $s_0$  παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.12.

Μπορούμε να αποδείξουμε τα δύο παρακάτω λήμματα.

**Λήμμα 24.** Έστω  $k > 2$  και  $G$  το γράφημα παρεμβολών ενός κυψελικού δικτύου με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k$ . Θεωρούμε το χρωματισμό του  $G$  που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος  $CRS-k$  και τις κλάσεις χρωμάτων  $s_i$ , για  $i = 0, 1, \dots, 3k^2 - 3k$ . Για κάθε χρώμα  $j$  τέτοιο ώστε  $0 \leq j \leq 3k^2 - 3k$ , ο αριθμός των διαφορετικών κλάσεων χρωμάτων  $s_i$  στις οποίες ανήκει το χρώμα  $j$  είναι  $\frac{3k^2}{4}$  αν  $k$  άρτιος, και  $\frac{3k^2+1}{4}$  αν  $k$  περιττός.

**Λήμμα 25.** Έστω  $k > 2$  και  $G$  το γράφημα παρεμβολών ενός κυψελικού δικτύου με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k$ . Θεωρούμε το χρωματισμό του  $G$  που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος  $CRS-k$  και τις κλάσεις χρωμάτων  $s_i$ , για  $i = 0, 1, \dots, 3k^2 - 3k$ . Για  $i = 0, 1, \dots, 3k^2 - 3k$ , κάθε συνεκτική συνιστώσα του υπογραφήματος του  $G$  που αποτελείται από κορυφές του  $G$  που έχουν χρωματιστεί με χρώματα της κλάσης  $s_i$  είναι κλίκα.

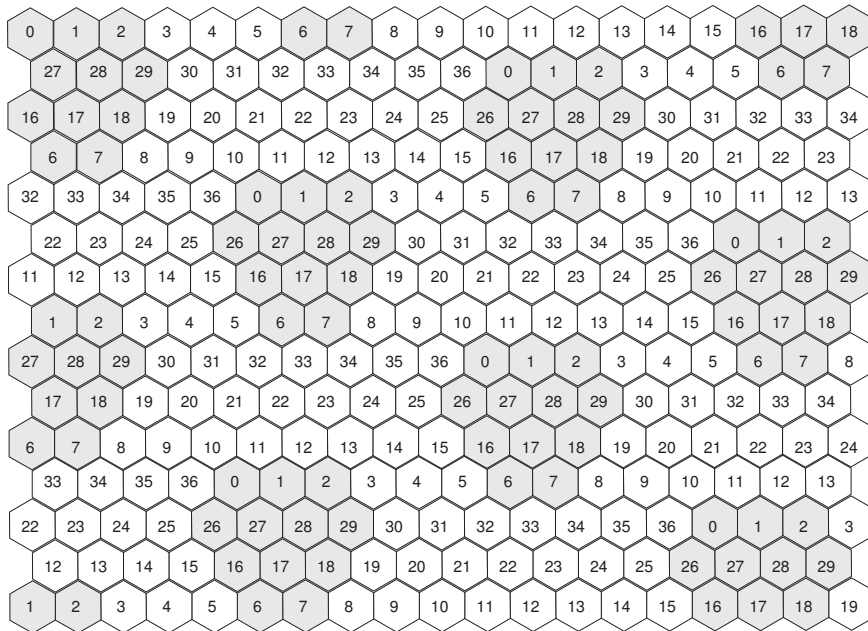
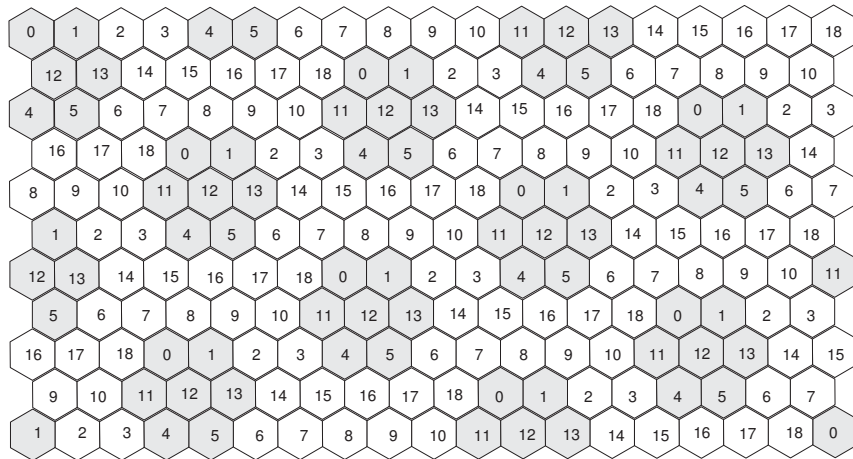
Επομένως, οι χρωματισμοί και οι χρωματικές κλάσεις που περιγράψαμε πληρούν τις συνθήκες που ορίζει το Λήμμα 20 για  $\lambda = 3k^2 - 3k + 1$  και  $\nu = \frac{3k^2}{4}$  αν  $k$  άρτιος, και  $\nu = \frac{3k^2+1}{4}$  αν  $k$  περιττός. Με βάση το Λήμμα 20, καταλήγουμε στο ακόλουθο Θεώρημα.

**Θεώρημα 26.** Ο συγκριτικός λόγος απόδοσης απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη του αλγόριθμου  $CRS-k$  σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k \geq 2$  είναι  $4 \left(1 - \frac{3k-1}{3k^2}\right)$  αν  $k$  είναι άρτιος, και  $4 \left(1 - \frac{3k}{3k^2+1}\right)$  αν  $k$  είναι περιττός.

Ο αλγόριθμος  $CRS-k$  για κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k$  χρησιμοποιεί μια πηγή τυχειότητας η οποία ισοπίθानα επιλέγει ένα από  $3k^2 - 3k + 1$  διακριτά αντικείμενα. Εφαρμόζοντας τις ιδέες που χρησιμοποιήθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να πετύχουμε παρόμοια φράγματα για τους συγκριτικούς λόγους απόδοσης μέσω αλγορίθμων που χρησιμοποιούν τυχαία δυαδικά ψηφία.

**Συμπέρασμα 27.** Για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει ένας *on-line* πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων για κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k$ , που χρησιμοποιεί  $O(\log 1/\epsilon + \log k)$  τυχαία δυαδικά ψηφία και έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ  $4 \left(1 - \frac{3k-1}{3k^2}\right) + \epsilon$  αν  $k$  είναι άρτιος, και  $4 \left(1 - \frac{3k}{3k^2+1}\right) + \epsilon$  αν  $k$  είναι περιττός, απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.





Σχήμα 3.12: Παραδείγματα χρωματισμών που χρησιμοποιούνται από τους αλγόριθμους CRS-3 και CRS-4. Οι σκιασμένες κυψέλες είναι εκείνες που έχουν χρωματιστεί με τα χρώματα του συνόλου  $s_0$ .

### 3.8 Κάτω φράγματα

Όπως είδαμε στην Ενότητα 3.1, κανένας ντετερμινιστικός on-line αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων δε μπορεί να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από 3 απέναντι σε off-line αντιπάλους. Εύκολα μπορούμε να επεκτείνουμε αυτό το κάτω φράγμα ώστε να πάρουμε κάτω φράγματα 4 και 5 για τη συγκριτική απόδοση ντετερμινιστικών on-line αλγορίθμων ελέγχου αποδοχής κλήσεων για κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k \in \{3, 4, 5\}$  και  $k \geq 6$ , αντίστοιχα.

Θεωρούμε κυψελικό δίκτυο με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k$  που υποστηρίζει μία συχνότητα. Το κάτω φράγμα μπορεί εύκολα να επεκταθεί και για δίκτυα που υποστηρίζουν αυθαίρετα πολλές συχνότητες. Έστω  $v$  μία κυψέλη του δικτύου. Επικεντρωνόμαστε σε εκείνες τις κυψέλες που βρίσκονται σε απόσταση το πολύ  $k - 1$  από την  $v$ . Μπορούμε να επιλέξουμε ένα σύνολο  $S$  με  $\lfloor \frac{6(k-1)}{k} \rfloor$  κυψέλες που να βρίσκονται σε απόσταση το πολύ  $k - 1$  από την  $v$  έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο από αυτές να είναι τουλάχιστον  $k$ . Θεωρούμε, τώρα, ένα ντετερμινιστικό αλγόριθμο  $A$  και έναν off-line αντίπαλο  $ADV$  που λειτουργεί ως εξής. Αρχικά, ο αντίπαλος παρουσιάζει μία κλήση στην κυψέλη  $v$ . Αν ο αλγόριθμος  $A$  απορρίψει την κλήση, ο αντίπαλος σταματάει την ακολουθία, δηλ. δεν παρουσιάζει άλλες κλήσεις. Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος  $A$  δεν έχει κανένα κέρδος. Διαφορετικά (δηλ., αν ο αλγόριθμος  $A$  αποδεχτεί την κλήση στην κυψέλη  $v$ ), ο αντίπαλος παρουσιάζει από μία κλήση σε καθεμιά από τις κυψέλες του συνόλου  $S$ . Σε αυτήν την περίπτωση, το κέρδος του αλγορίθμου  $A$  είναι 1, ενώ το κέρδος του βέλτιστου off-line αλγορίθμου θα ήταν ίσο με το μέγεθος του συνόλου  $S$  που είναι 4 αν  $k \in \{3, 4, 5\}$  και 5 αν  $k \geq 6$ .

Επομένως, οι πιθανοτικοί αλγόριθμοι που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα υπερνικούν σημαντικά το κάτω φράγμα για τη συγκριτική απόδοση των ντετερμινιστικών αλγορίθμων. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την Αρχή Minimax [61] (δες επίσης [47]), αποδεικνύουμε κάτω φράγματα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης, απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη, κάθε πιθανοτικού αλγορίθμου για κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k \in \{2, 3, 4\}$ ,  $k \in \{5, \dots, 11\}$ ,  $k \geq 12$ , καθώς και για κυψελικά δίκτυα με επίπεδους γράφους παρεμβολών. Και σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε δίκτυα που υποστηρίζουν μία συχνότητα αλλά τα κάτω φράγματα που παρουσιάζουμε μπορεί εύκολα να επεκταθούν ώστε να ισχύουν και για δίκτυα που υποστηρίζουν πολλές συχνότητες.

**Λήμμα 28** (Minimax Principle [47]). Δεδομένης μιας πιθανοτικής κατανομής  $\mathcal{P}$  σε ακολουθίες κλήσεων  $\sigma$ , συμβολίζουμε με  $\mathcal{E}_P[B_A(\sigma)]$  και με  $\mathcal{E}_P[B_{OPT}(\sigma)]$

τη μέση τιμή του κέρδους ενός ντετερμινιστικού αλγορίθμου  $A$  και του βέλτιστου *off-line* αλγορίθμου, αντίστοιχα, όταν αυτοί εκτελούνται σε ακολουθίες κλήσεων που παράγονται με βάση την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$ . Ορίζουμε το συγκριτικό λόγο απόδοσης του αλγορίθμου  $A$  σύμφωνα με την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$ ,  $c_A^{\mathcal{P}}$  να είναι τέτοιος ώστε

$$c_A^{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_{OPT}(\sigma)]}{\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_A(\sigma)]}.$$

Έστω  $A_R$  ένας πιθανοτικός αλγόριθμος. Τότε, ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγορίθμου  $A$  με βάση την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$  αποτελεί ένα κάτω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης του αλγορίθμου  $A_R$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη, δηλ.,

$$c_A^{\mathcal{P}} \leq c_{A_R}.$$

**Θεώρημα 29.** Κανένας πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων σε κυβελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k \in \{2, 3, 4\}$  δε μπορεί να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από 1.857 απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.

*Απόδειξη.* Θεωρούμε έναν κατάλληλο χρωματισμό των κυψελών του δικτύου με τα χρώματα ΚΟΚΚΙΝΟ, ΜΠΛΕ, και ΠΡΑΣΙΝΟ. Έστω  $r_0$  μία κόκκινη κυψέλη,  $b_1, b_2$ , και  $b_3$  οι μπλε γειτονικές της, και  $g_1, g_2$ , και  $g_3$  οι πράσινες γειτονικές της. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας αντίπαλος  $ADV$  που δημιουργεί κλήσεις σύμφωνα με μια πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$  κατά τέτοιον τρόπο ώστε κανένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος να μη μπορεί να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από 1.857 υπό την  $\mathcal{P}$  ακόμα κι αν γνωρίζει την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$  εκ των προτέρων.

Ορίζουμε την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$  ως εξής. Αρχικά, ο αντίπαλος εμφανίζει μια κλήση σε μία κόκκινη κυψέλη  $r_0$ . Μετά,

- είτε σταματά την ακολουθία, με πιθανότητα  $4/7$ ,
- είτε κάνει τα ακόλουθα, με πιθανότητα  $3/7$ . Εμφανίζει δύο κλήσεις στις κυψέλες  $b_1$  και  $b_2$ , και
  - είτε εμφανίζει μία κλήση στην κυψέλη  $b_3$  με πιθανότητα  $1/3$ ,
  - είτε εμφανίζει τρεις κλήσεις στις κυψέλες  $g_1, g_2$ , και  $g_3$ , με πιθανότητα  $2/3$ .

Εύκολα φαίνεται ότι το μέσο κέρδος του βέλτιστου *off-line* αλγορίθμου όταν εκτελείται σε ακολουθίες κλήσεων που δημιουργούνται σύμφωνα με την  $\mathcal{P}$  είναι

$$\mathcal{E}[B_{OPT}(\sigma)] = 1 \cdot \frac{4}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{13}{7}.$$

Έστω  $A$  ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων που εκτελείται για κλήσεις που παράγονται από τον αντίπαλο  $ADV$ . Θεωρούμε  $t$  εκτελέσεις του αλγορίθμου για  $t$  ακολουθίες που παράγονται σύμφωνα με την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$ . Έστω  $q_0$  ο αριθμός των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος  $A$  αποδέχεται την κλήση που εμφανίζεται στην κυψέλη  $r_0$ , και  $q_1$  ο αριθμός των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο  $A$  αποδέχεται και τις δύο κλήσεις στις κυψέλες  $b_1$  και  $b_2$ .

Ο μέσος αριθμός εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος δεν αποδέχεται την κλήση στην κυψέλη  $r_0$  και ο αντίπαλος εμφανίζει μια κλήση στην κυψέλη  $b_3$  είναι  $\frac{3}{7}\frac{1}{3}(t - q_0)$ . Όμοια, ο μέσος αριθμός εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος δεν αποδέχεται τις κλήσεις στις κυψέλες  $r_0, b_1$ , και  $b_2$  και ο αντίπαλος εμφανίζει κλήσεις στις κυψέλες  $g_1, g_2, g_3$  είναι  $\frac{2}{3}(\frac{3}{7}(t - q_0) - q_1)$ . Επομένως,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_A(\sigma)] &\leq \frac{q_0 + 2q_1 + \frac{3}{7}\frac{1}{3}(t - q_0) + 3\frac{2}{3}(\frac{3}{7}(t - q_0) - q_1)}{t} \\ &= 1 \end{aligned}$$

και

$$c_A^{\mathcal{P}} \geq \frac{13}{7} = 1.857.$$

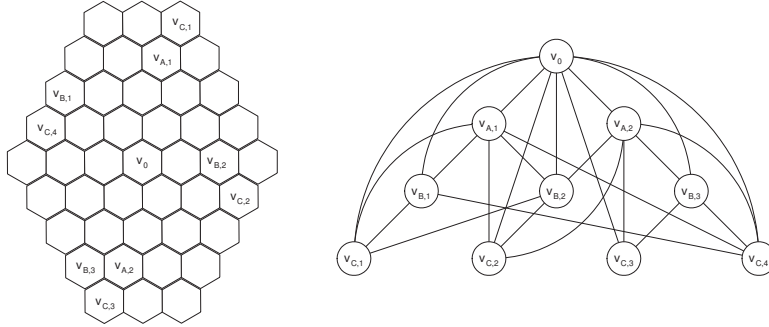
Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 28, αποδεικνύουμε ότι αυτό αποτελεί ένα κάτω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης κάθε πιθανοτικού αλγορίθμου απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.  $\square$

**Θεώρημα 30.** *Κανένας πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k \geq 5$  δε μπορεί να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από  $25/12$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε ένα κυψελικό δίκτυο με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 5 και δέκα κυψέλες  $v_0, v_{A,1}, v_{A,2}, v_{B,1}, v_{B,2}, v_{B,3}, v_{C,1}, v_{C,2}, v_{C,3}$ , και  $v_{C,4}$  όπως φαίνονται στο Σχήμα 3.14. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας αντίπαλος  $ADV$  που παράγει κλήσεις σε αυτές τις κυψέλες σύμφωνα με μια πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$  κατά τέτοιο τρόπο ώστε κανένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος να μη μπορεί να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από  $25/12$  υπό την  $\mathcal{P}$  ακόμα κι αν γνωρίζει την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$  εκ των προτέρων.

Ορίζουμε την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$  ως εξής. Αρχικά, ο αντίπαλος εμφανίζει μια κλήση στην κυψέλη  $v_0$ . Μετά,

- είτε σταματά την ακολουθία, με πιθανότητα  $1/2$ ,



Σχήμα 3.13: Το κυψελικό δίκτυο με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 5 που χρησιμοποιείται για απόδειξη του Θεωρήματος 9 και το υπογράφημα του γραφήματος παρεμβολών που σχηματίζεται από τις κορυφές που αντιστοιχούν σε δέκα κλήσεις  $v_0, v_{A,1}, v_{A,2}, v_{B,1}, v_{B,2}, v_{B,3}, v_{C,1}, v_{C,2}, v_{C,3}$ , και  $v_{C,4}$ .

- είτε προχωράει ως εξής, με πιθανότητα  $1/2$ . Παρουσιάζει δύο κλήσεις, μία στην κυψέλη  $v_{A,1}$  και μία στην κυψέλη  $v_{A,2}$ , και
  - είτε σταματά την ακολουθία, με πιθανότητα  $1/3$ ,
  - είτε προχωράει ως εξής με πιθανότητα  $2/3$ . Παρουσιάζει τρεις κλήσεις, μία στην κυψέλη  $v_{B,1}$ , μία στην κυψέλη  $v_{B,2}$ , και μία στην κυψέλη  $v_{B,3}$ , και
    - \* είτε σταματά την ακολουθία, με πιθανότητα  $1/4$ ,
    - \* είτε προχωράει ως εξής, με πιθανότητα  $3/4$ . Παρουσιάζει τέσσερις κλήσεις, μία στην κυψέλη  $v_{C,1}$ , μία στην κυψέλη  $v_{C,2}$ , μία στην κυψέλη  $v_{C,3}$ , και μία στην κυψέλη  $v_{C,4}$ , και μετά σταματά την ακολουθία.

Προφανώς, το κέρδος του βέλτιστου off-line αλγορίθμου ισούται με τον αριθμό των κλήσεων που παρουσιάζονται από τον αντίπαλο κατά το τελευταίο βήμα πριν τη διακοπή της ακολουθίας. Επομένως, το μέσο κέρδος του βέλτιστου off-line αλγορίθμου για ακολουθίες κλήσεων που δημιουργούνται σύμφωνα με την  $\mathcal{P}$  είναι

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_{OPT}(\sigma)] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{25}{12}.$$

Έστω  $A$  ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων που εκτελείται για κλήσεις που παράγονται από έναν αντίπαλο  $ADV$ . Αρχικά, παρατηρούμε ότι κανένας αλγόριθμος δε θα μπορούσε να κερδίσει κόνοντας

αποδεκτή μία από τις δύο κλήσεις που εμφανίζονται στις κυψέλες  $v_{A,1}$  και  $v_{A,2}$  ή κάνοντας δεκτές μία ή δύο από τις τρεις κλήσεις που εμφανίζονται στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$  και  $v_{B,3}$ . Υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος  $A$  απορρίπτει την κλήση στην κυψέλη  $v_0$ , αποδέχεται την κλήση στην κυψέλη  $v_{A,1}$  (αντίστοιχα, στην  $v_{A,2}$ ) και απορρίπτει την κλήση στην κυψέλη  $v_{A,2}$  (αντίστοιχα, στην  $v_{A,1}$ ). Τότε, ακόμα και στην περίπτωση που ο αντίπαλος δε διακόψει την ακολουθία (δηλ. δεν παρουσιάσει άλλες κλήσεις) αμέσως αφού παρουσιάσει τις δύο κλήσεις στις κυψέλες  $v_{A,1}$  και  $v_{A,2}$ , ο αλγόριθμος μπορεί να αποδεχτεί μόνο μία από τις δύο κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,3}$  και  $v_{C,3}$  (αντίστοιχα, στις  $v_{B,1}$  και  $v_{C,1}$ ). Αυτό θα έδινε κέρδος για τον αλγόριθμο το πολύ 2. Επίσης, κανένας αλγόριθμος δε θα μπορούσε να πετύχει μεγαλύτερο κέρδος με το να αποδεχτεί μία από τις τρεις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$ , και  $v_{B,3}$ . Ας υποθέσουμε ότι ο αλγόριθμος απορρίπτει τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_0$ ,  $v_{A,1}$  και  $v_{A,2}$ , αποδέχεται την κλήση στην κυψέλη  $v_{B,1}$  (αντίστοιχα, στην  $v_{B,2}$ , αντίστοιχα, στην  $v_{B,3}$ ), και απορρίπτει τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,2}$  και  $v_{B,3}$  (αντίστοιχα, στις  $v_{B,1}$  και  $v_{B,3}$ , αντίστοιχα, στις  $v_{B,2}$  και  $v_{B,3}$ ). Τότε, ακόμα κι αν ο αντίπαλος παρουσίαζε και άλλες κλήσεις πριν την εμφάνιση των κλήσεων στις κυψέλες  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$ , και  $v_{C,4}$ , ο αλγόριθμος θα μπορούσε να αποδεχτεί μόνο τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{C,2}$  και  $v_{C,3}$  (αντίστοιχα, στις  $v_{C,3}$  και  $v_{C,4}$ , αντίστοιχα, στις  $v_{C,1}$  και  $v_{C,2}$ ). Αυτό θα έδινε κέρδος για τον αλγόριθμο το πολύ 3. Επιπλέον, κανένας αλγόριθμος δε θα μπορούσε να πετύχει παραπάνω κέρδος κάνοντας αποδεκτές δύο από τις τρεις κλήσεις που εμφανίζονται στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$ , και  $v_{B,3}$ . Ας υποθέσουμε ότι ο αλγόριθμος απορρίπτει τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_0$ ,  $v_{A,1}$ , και  $v_{A,2}$ , αποδέχεται τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,2}$  και  $v_{B,3}$  και απορρίπτει την κλήση στην κυψέλη  $v_{B,1}$ . Τότε, ακόμα κι αν ο αντίπαλος δε διακόψει την ακολουθία πριν να εμφανιστούν οι κλήσεις στις κυψέλες  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$ , και  $v_{C,4}$ , ο αλγόριθμος δε μπορεί να αποδεχτεί άλλες κλήσεις. Όμοια, ας υποθέσουμε ότι ο αλγόριθμος απορρίπτει τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_0$ ,  $v_{A,1}$  και  $v_{A,2}$ , αποδέχεται τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,1}$  και  $v_{B,2}$  (αντίστοιχα, στις  $v_{B,1}$  και  $v_{B,3}$ ), και απορρίπτει την κλήση στην κυψέλη  $v_{B,3}$  (αντίστοιχα, στην  $v_{B,2}$ ). Τότε, ακόμα και στην περίπτωση που ο αντίπαλος δε διακόψει την ακολουθία πριν την εμφάνιση των κλήσεων στις κυψέλες  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$ , και  $v_{C,4}$ , το καλύτερο που θα μπορούσε να πετύχει ο αλγόριθμος θα ήταν να αποδεχτεί την κλήση στην κυψέλη  $v_{C,3}$  (αντίστοιχα, στην  $v_{C,2}$ ). Αυτό θα έδινε κέρδος για τον αλγόριθμο το πολύ 3. Οι προηγούμενες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν με λεπτομερή μελέτη του υπογραφήματος του γραφήματος παρεμβολών που δημιουργείται από τις δέκα κυψέλες  $v_0$ ,  $v_{A,1}$ ,  $v_{A,2}$ ,  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$ ,  $v_{B,3}$ ,  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$ , και  $v_{C,4}$  (δες σχετικά και το δεξί μέρος του Σχήματος 3.14). Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο αλγόριθμος είτε αποδέχεται όλες τις κλήσεις που εμφανίζονται σε κάποιο βήμα είτε τις απορρίπτει όλες.

Θεωρούμε  $t$  εκτελέσεις του αλγορίθμου για  $t$  ακολουθίες που παράγονται σύμφωνα με την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$ . Έστω  $q_0$  ο αριθμός των εκτελέσεων για τις οποίες ο αλγόριθμος  $A$  αποδέχεται την κλήση που εμφανίζεται στην κυψέλη  $v_0$ ,  $q_1$  ο αριθμός των εκτελέσεων για τις οποίες ο αλγόριθμος  $A$  αποδέχεται και τις δύο κλήσεις που εμφανίζονται στις κυψέλες  $v_{A,1}$  και  $v_{A,2}$ , και έστω  $q_2$  ο αριθμός των εκτελέσεων για τις οποίες ο αλγόριθμος αποδέχεται και τις τρεις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,2}$ , και  $v_{C,3}$ .

Ο μέσος αριθμός εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος δεν αποδέχεται την κλήση στην κυψέλη  $v_0$  και ο αντίπαλος εμφανίζει κλήσεις στις κυψέλες  $v_{A,1}$  και  $v_{A,2}$  είναι  $\frac{1}{2}(t - q_0)$ . Επομένως, ο μέσος αριθμός εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος δεν αποδέχεται τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_0$ ,  $v_{A,1}$ , και  $v_{A,2}$  και ο αντίπαλος εμφανίζει κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$ , και  $v_{B,3}$  είναι  $\frac{2}{3}(\frac{1}{2}(t - q_0) - q_1)$  και ο μέσος αριθμός εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος δεν αποδέχεται τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_0$ ,  $v_{A,1}$ ,  $v_{A,2}$ ,  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$ , και  $v_{B,3}$  και ο αντίπαλος εμφανίζει κλήσεις στις κυψέλες  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$ , και  $v_{C,4}$  είναι  $\frac{3}{4}(\frac{2}{3}(\frac{1}{2}(t - q_0) - q_1) - q_2)$ . Επομένως,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_A(\sigma)] \leq \frac{q_0 + 2q_1 + 3q_2 + 4\frac{3}{4}(\frac{2}{3}(\frac{1}{2}(t - q_0) - q_1) - q_2)}{t} = 1$$

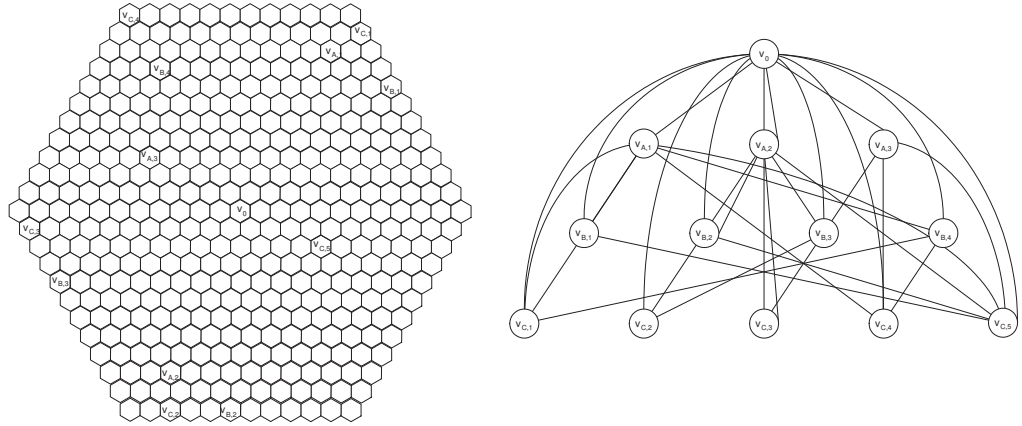
και  $c_A^{\mathcal{P}} \geq 25/12$ . Με βάση το Λήμμα 28, αποδεικνύουμε ότι αυτό αποτελεί ένα κάτω φράγμα για τη συγκριτική απόδοση κάθε πιθανοτικού αλγορίθμου απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.  $\square$

**Θεώρημα 31.** *Κανένας πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k = 12$  δε μπορεί να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από  $127/60$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε ένα κυψελικό δίκτυο με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 12 και δεκατρείς κυψέλες  $v_0, v_{A,1}, v_{A,2}, v_{A,3}, v_{B,1}, v_{B,2}, v_{B,3}, v_{B,4}, v_{C,1}, v_{C,2}, v_{C,3}, v_{C,4}$  και  $v_{C,5}$  όπως φαίνονται στο Σχήμα 3.14. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας αντίπαλος  $ADV$  που εμφανίζει κλήσεις σε αυτές τις κυψέλες σύμφωνα με μία πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$  κατά τέτοιον τρόπο ώστε κανένας ντετερμινιστικός να μη μπορεί να επιτύχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από  $127/60$  με βάση την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$  ακόμα κι αν γνωρίζει εκ των προτέρων την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$ .

Ορίζουμε την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$  ως εξής. Αρχικά, ο αντίπαλος εμφανίζει μια κλήση στην κυψέλη  $v_0$ . Μετά, ο αντίπαλος

- είτε σταματάει, με πιθανότητα  $2/3$ ,



Σχήμα 3.14: Το κυψελικό δίκτυο με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 12 που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Θεωρήματος 31 και το υπογράφημα του γραφήματος παρεμβολών που δημιουργείται από τις κορυφές που αντιστοιχούν στις δεκατρείς κυψέλες  $v_0$ ,  $v_{A,1}$ ,  $v_{A,2}$ ,  $v_{A,3}$ ,  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$ ,  $v_{B,3}$ ,  $v_{B,4}$ ,  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$ ,  $v_{C,4}$  και  $v_{C,5}$ .

- ή κάνει τα ακόλουθα, με πιθανότητα  $1/3$ . Εμφανίζει τρεις κλήσεις, μία στην κυψέλη  $v_{A,1}$ , μία στην κυψέλη  $v_{A,2}$  και μία στην κυψέλη  $v_{A,3}$ , και
  - είτε σταματάει, με πιθανότητα  $1/4$ ,
  - ή κάνει τα ακόλουθα, με πιθανότητα  $3/4$ . Εμφανίζει τέσσερις κλήσεις, μία στην κυψέλη  $v_{B,1}$ , μία στην κυψέλη  $v_{B,2}$ , μία στην κυψέλη  $v_{B,3}$ , και μία στην κυψέλη  $v_{B,4}$ , και
    - \* είτε σταματάει, με πιθανότητα  $1/5$ ,
    - \* ή κάνει τα ακόλουθα, με πιθανότητα  $4/5$ . Εμφανίζει πέντε κλήσεις, μία στην κυψέλη  $v_{C,1}$ , μία στην κυψέλη  $v_{C,2}$ , μία στην κυψέλη  $v_{C,3}$ , μία στην κυψέλη  $v_{C,4}$ , και μία στην κυψέλη  $v_{C,5}$ , και μετά σταματάει.

Προφανώς, το κέρδος του βέλτιστου off-line αλγόριθμου ισούται με τον αριθμό των κλήσεων που εμφανίζει ο αντίπαλος στο τελευταίο βήμα πριν σταματήσει την ακολουθία. Επομένως, η μέση τιμή του κέρδους του βέλτιστου off-line αλγόριθμου για ακολουθίες κλήσεων που παράγονται σύμφωνα με την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$  είναι

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_{OPT}(\sigma)] = 1 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{127}{60}.$$



Έστω  $A$  ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων που εκτελείται για τις κλήσεις που παράγονται από τον αντίπαλο  $ADV$ . Αρχικά, παρατηρούμε ότι κανένας αλγόριθμος δε θα μπορούσε να κερδίσει με το να αποδεχτεί μία από τις τρεις κλήσεις που εμφανίζονται στις κυψέλες  $v_{A,1}$ ,  $v_{A,2}$  και  $v_{A,3}$ . Ας υποθέσουμε ότι ο αλγόριθμος απορρίπτει την κλήση στην κυψέλη  $v_0$ , αποδέχεται την κλήση στην κυψέλη  $v_{A,1}$  (αντίστοιχα στην κυψέλη  $v_{A,2}$ , αντίστοιχα στην κυψέλη  $v_{A,3}$ ) και απορρίπτει την κλήση στις κυψέλες  $v_{A,2}$  και  $v_{A,3}$  (αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{A,1}$  και  $v_{A,2}$ , αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{A,1}$  και  $v_{A,2}$ ). Τότε, ακόμα κι αν ο αντίπαλος δε σταματήσει την ακολουθία αμέσως αφού εμφανίσει τις τρεις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{A,1}$ ,  $v_{A,2}$  και  $v_{A,3}$ , ο αλγόριθμος μπορεί να αποδεχτεί μόνο τις δύο κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,3}$  και  $v_{B,4}$  (αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,1}$  και  $v_{B,4}$ , αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,1}$  και  $v_{B,2}$ ). Αυτό θα έδινε κέρδος το πολύ ίσο με 3.

Όμοια, κανένας αλγόριθμος δε θα μπορούσε να έχει κέρδος από το να αποδεχτεί δύο από τις τρεις κλήσεις που εμφανίζονται στις κυψέλες  $v_{A,1}$ ,  $v_{A,2}$ , και  $v_{A,3}$ . Ας υποθέσουμε ότι ο αλγόριθμος απορρίπτει την κλήση στην κυψέλη  $v_0$ , αποδέχεται τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{A,1}$  και  $v_{A,2}$  και απορρίπτει την κλήση στην κυψέλη  $v_{A,3}$ . Τότε, ακόμα κι αν ο αντίπαλος δε σταματήσει την ακολουθία πριν να εμφανίσει τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$ ,  $v_{B,3}$ ,  $v_{B,4}$ ,  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$ ,  $v_{C,4}$ , και  $v_{C,5}$ , ο αλγόριθμος δε μπορεί να αποδεχτεί άλλες κλήσεις. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι ο αλγόριθμος αποδέχεται τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{A,1}$  και  $v_{A,3}$  (αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{A,2}$  και  $v_{A,3}$ ) και απορρίπτει την κλήση στην κυψέλη  $v_{A,2}$  (αντίστοιχα στην κυψέλη  $v_{A,1}$ ). Τότε, ακόμα κι αν ο αντίπαλος δε σταματήσει την ακολουθία πριν να εμφανιστούν οι κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$ ,  $v_{B,3}$ ,  $v_{B,4}$ ,  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$ ,  $v_{C,4}$ , και  $v_{C,5}$ , ο αλγόριθμος μπορεί μόνο να αποδεχτεί την κλήση που εμφανίζεται στην κυψέλη  $v_{C,2}$  (αντίστοιχα στην κυψέλη  $v_{C,1}$ ). Αυτό θα έδινε κέρδος το πολύ ίσο με 3.

Επίσης, κανένας αλγόριθμος δε θα είχε παραπάνω κέρδος με το να αποδεχτεί μία από τις τέσσερις κλήσεις που εμφανίζονται στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$ ,  $v_{B,3}$ , και  $v_{B,4}$ . Υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος απορρίπτει τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_0$ ,  $v_{A,1}$ ,  $v_{A,2}$ , και  $v_{A,3}$ , αποδέχεται την κλήση στην κυψέλη  $v_{B,1}$  (αντίστοιχα στην κυψέλη  $v_{B,2}$ , αντίστοιχα στην κυψέλη  $v_{B,3}$ , αντίστοιχα στην κυψέλη  $v_{B,4}$ ), και απορρίπτει τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,2}$ ,  $v_{B,3}$ , και  $v_{B,4}$  (αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,3}$ , και  $v_{B,4}$ , αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$ , και  $v_{B,4}$ , αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$ , και  $v_{B,3}$ ). Τότε, ακόμα κι αν ο αντίπαλος δε σταματήσει την ακολουθία πριν να εμφανίσει τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$ ,  $v_{C,4}$ , και  $v_{C,5}$ , ο αλγόριθμος μπορεί μόνο να αποδεχτεί τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$  και  $v_{C,4}$  (αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,3}$  και  $v_{C,4}$ , αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,4}$  και  $v_{C,5}$ , αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$  και  $v_{C,5}$ ). αυτό θα έδινε κέρδος το πολύ ίσο με 4.

Επίσης, κανένας αλγόριθμος δε θα μπορούσε να κερδίσει με το να αποδεχτεί δύο από τις τέσσερις κλήσεις που εμφανίζονται στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$ ,  $v_{B,3}$ , και  $v_{B,4}$ . Ας υποθέσουμε ότι ο αλγόριθμος απορρίπτει τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_0$ ,  $v_{A,1}$ ,  $v_{A,2}$ , και  $v_{A,3}$ , αποδέχεται τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,1}$  και  $v_{B,2}$  (αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,2}$  και  $v_{B,3}$ , αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,1}$  και  $v_{B,4}$ ) και απορρίπτει τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,3}$  και  $v_{B,4}$  (αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,1}$  και  $v_{B,4}$ , αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,2}$  και  $v_{B,3}$ ). Τότε, ακόμα κι αν ο αντίπαλος δε σταματήσει την ακολουθία πριν να εμφανιστούν οι κλήσεις στις κυψέλες  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$ ,  $v_{C,4}$ , και  $v_{C,5}$ , ο αλγόριθμος μπορεί μόνο να αποδεχτεί τις κλήσεις που εμφανίζονται στις κυψέλες  $v_{C,3}$  και  $v_{C,4}$  (αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{C,1}$  και  $v_{C,4}$ , αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{C,2}$  και  $v_{C,3}$ ). Αυτό θα έδινε κέρδος το πολύ ίσο με 4. Όμοια, υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος απορρίπτει τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_0$ ,  $v_{A,1}$ ,  $v_{A,2}$ , και  $v_{A,3}$ , αποδέχεται τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,1}$  και  $v_{B,3}$  (αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,2}$  και  $v_{B,4}$ , αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,3}$  και  $v_{B,4}$ ) και απορρίπτει τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,2}$  και  $v_{B,4}$  (αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,1}$  και  $v_{B,3}$ , αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,1}$  και  $v_{B,2}$ ). Τότε, ακόμα κι αν ο αντίπαλος δε σταματήσει την ακολουθία πριν να εμφανιστούν οι κλήσεις στις κυψέλες  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$ ,  $v_{C,4}$ , και  $v_{C,5}$ , ο αλγόριθμος θα μπορούσε μόνο να αποδεχτεί την κλήση που εμφανίζεται στην κυψέλη  $v_{C,4}$  (αντίστοιχα στην κυψέλη  $v_{C,3}$ , αντίστοιχα στην κυψέλη  $v_{C,5}$ ). Αυτό θα έδινε κέρδος το πολύ ίσο με 3.

Επίσης, κανένας αλγόριθμος δε θα μπορούσε να έχει παραπάνω κέρδος από το να αποδεχτεί τρεις από τις τέσσερις κλήσεις που εμφανίζονται στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$ ,  $v_{B,3}$ , και  $v_{B,4}$ . Υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος απορρίπτει τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_0$ ,  $v_{A,1}$ ,  $v_{A,2}$ , και  $v_{A,3}$ , αποδέχεται τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$  και  $v_{B,3}$  (αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$  και  $v_{B,4}$ ) και απορρίπτει την κλήση στην κυψέλη  $v_{B,4}$  (αντίστοιχα στην κυψέλη  $v_{B,3}$ ). Τότε, ακόμα κι αν ο αντίπαλος σταματήσει την ακολουθία πριν να εμφανιστούν οι κλήσεις στις κυψέλες  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$ ,  $v_{C,4}$ , και  $v_{C,5}$ , ο αλγόριθμος θα μπορούσε μόνο να αποδεχτεί την κλήση που εμφανίζεται στην κυψέλη  $v_{C,4}$  (αντίστοιχα στην κυψέλη  $v_{C,3}$ ). αυτό θα έδινε κέρδος το πολύ ίσο με 4. Όμοια, υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος αποδέχεται τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,3}$  και  $v_{B,4}$  (αντίστοιχα στις κυψέλες  $v_{B,2}$ ,  $v_{B,3}$  και  $v_{B,4}$ ) και απορρίπτει την κλήση στην κυψέλη  $v_{B,2}$  (αντίστοιχα στην κυψέλη  $v_{B,1}$ ). Τότε, ακόμα κι αν ο αντίπαλος δε σταματήσει την ακολουθία πριν να εμφανιστούν οι κλήσεις στις κυψέλες  $v_{C,1}$ ,  $v_{C,2}$ ,  $v_{C,3}$ ,  $v_{C,4}$ , και  $v_{C,5}$ , ο αλγόριθμος δε μπορεί να αποδεχτεί άλλες κλήσεις. Αυτό θα έδινε κέρδος το πολύ ίσο με 3.

Επίσης, κανένας αλγόριθμος δε θα μπορούσε να έχει παραπάνω κέρδος από το να αποδεχτεί και τις τέσσερις κλήσεις που εμφανίζονται στις κυψέλες  $v_{B,1}$ ,  $v_{B,2}$ ,  $v_{B,3}$ , και  $v_{B,4}$ . Τότε, ακόμα κι αν ο αντίπαλος δε σταματήσει την

ακολουθία πριν να εμφανιστούν οι κλήσεις στις κυψέλες  $v_{C,1}, v_{C,2}, v_{C,3}, v_{C,4}$ , και  $v_{C,5}$ , ο αλγόριθμος δε μπορεί να αποδεχτεί άλλες κλήσεις. Αυτό θα έδινε κέρδος το πολύ ίσο με 4.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις εύκολα μπορούν να γίνουν αν μελετηθεί με προσοχή το υπογράφημα του γράφημα παρεμβολών που προκύπτει από τις δεκατρείς κυψέλες  $v_0, v_{A,1}, v_{A,2}, v_{A,3}, v_{B,1}, v_{B,2}, v_{B,3}, v_{B,4}, v_{C,1}, v_{C,2}, v_{C,3}, v_{C,4}$ , και  $v_{C,5}$  (δες και δεξιά στο Σχήμα 3.14). Επομένως, μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ότι ο αλγόριθμος είτε αποδέχεται όλες τις κλήσεις που εμφανίζονται σε κάποιο βήμα είτε τις απορρίπτει όλες.

Θεωρούμε  $t$  εκτελέσεις του αλγορίθμου σε  $t$  ακολουθίες κλήσεων που παράγονται σύμφωνα με την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$ . Έστω  $q_0$  ο αριθμός των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος  $A$  αποδέχεται την κλήση που εμφανίζεται στην κυψέλη  $v_0$ ,  $q_1$  ο αριθμός των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο  $A$  αποδέχεται τις τρεις κλήσεις που εμφανίζονται στις κυψέλες  $v_{A,1}, v_{A,2}$ , και  $v_{A,3}$ , και  $q_2$  ο αριθμός των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος αποδέχεται τις τέσσερις κλήσεις που εμφανίζονται στις κυψέλες  $v_{C,1}, v_{C,2}, v_{C,3}$ , και  $v_{C,4}$ .

Η μέση τιμή του αριθμού των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος δεν αποδέχεται την κλήση στην κυψέλη  $v_0$  και ο αντίπαλος εμφανίζει κλήσεις στις κυψέλες  $v_{A,1}, v_{A,2}$  και  $v_{A,3}$  είναι  $\frac{1}{3}(t - q_0)$ . Επομένως, η μέση τιμή του αριθμού των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος δεν αποδέχεται τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_0, v_{A,1}, v_{A,2}$ , και  $v_{A,3}$  και ο αντίπαλος εμφανίζει κλήσεις στις κυψέλες  $v_{B,1}, v_{B,2}, v_{B,3}$ , και  $v_{B,4}$  είναι  $\frac{3}{4}(\frac{1}{3}(t - q_0) - q_1)$  και η μέση τιμή του αριθμού των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος δεν αποδέχεται τις κλήσεις στις κυψέλες  $v_0, v_{A,1}, v_{A,2}, v_{A,3}, v_{B,1}, v_{B,2}, v_{B,3}$ , και  $v_{B,4}$  και ο αντίπαλος εμφανίζει κλήσεις στις κυψέλες  $v_{C,1}, v_{C,2}, v_{C,3}, v_{C,4}$ , και  $v_{C,5}$  είναι  $\frac{4}{5}(\frac{3}{4}(\frac{1}{3}(t - q_0) - q_1) - q_2)$ . Επομένως,

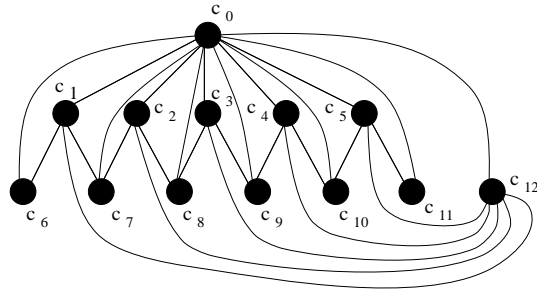
$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_A(\sigma)] \leq \frac{q_0 + 3q_1 + 4q_2 + 5\frac{4}{5}(\frac{3}{4}(\frac{1}{3}(t - q_0) - q_1) - q_2)}{t} = 1$$

και  $c_A^{\mathcal{P}} \geq 127/60$ . Από το Λήμμα 28, συνεπάγεται ότι η τιμή αυτή αποτελεί ένα κάτω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης κάθε πιθανοτικού αλγορίθμου απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.  $\square$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το κάτω φράγμα για επίπεδα δίκτυα. Σημειώνουμε ότι το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα είναι το 4 και επιτυγχάνεται από τον αλγόριθμο “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής” [1, 52].

**Θεώρημα 32.** Υπάρχει ένα επίπεδο δίκτυο για το οποίο κανένας πιθανοτικός αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων δε μπορεί να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από 2.086 απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.

*Απόδειξη.* Θεωρούμε ένα επίπεδο δίκτυο του οποίου το γράφημα παρεμβολών φαίνεται στο Σχήμα 3.15. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένας αντίπαλος  $ADV$  που παράγει κλήσεις σύμφωνα με μία πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$  κατά τέτοιον τρόπο ώστε κανένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος να μη μπορεί να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από 2.086 υπό την  $\mathcal{P}$  ακόμα κι αν γνωρίζει την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$  εκ των προτέρων.



Σχήμα 3.15: Το επίπεδο γράφημα παρεμβολών που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Θεωρήματος 32.

Ορίζουμε την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$  ως εξής. Αρχικά, ο αντίπαλος εμφανίζει μια κλήση στην κυψέλη  $c_0$ . Μετά,

- είτε σταματά την ακολουθία, με πιθανότητα  $4/5$ ,
- ή κάνει τα ακόλουθα, με πιθανότητα  $1/5$ . Εμφανίζει από μία κλήση στις κυψέλες  $c_1, \dots, c_5$ , και
  - είτε σταματά την ακολουθία, με πιθανότητα  $2/7$ ,
  - ή εμφανίζει από μία κλήση στις κυψέλες  $c_6, \dots, c_{12}$ , με πιθανότητα  $5/7$ .

Εύκολα φαίνεται ότι το μέσο κέρδος του βέλτιστου off-line Αλγόριθμου όταν εκτελείται για ακολουθίες κλήσεων που παράγονται σύμφωνα με την  $\mathcal{P}$  είναι

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_{OPT}(\sigma)] = 1 \cdot \frac{4}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} + 7 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{73}{35}.$$

Έστω  $A$  ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος ελέγχου αποδοχής κλήσεων που εκτελείται για κλήσεις που παράγονται από τον αντίπαλο  $ADV$ . Θεωρούμε  $t$  εκτελέσεις του αλγόριθμου για  $t$  ακολουθίες που παράγονται σύμφωνα με την πιθανοτική κατανομή  $\mathcal{P}$ . Έστω  $q_0$  ο αριθμός των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος  $A$  εξυπηρετεί την κλήση που εμφανίζεται στην κυψέλη  $c_0$ , και  $q_1$

ο αριθμός των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο  $A$  εξυπηρετεί και τις δύο κλήσεις στις κυψέλες  $c_1$  και  $c_2$ .

Ο μέσος αριθμός εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος δεν αποδέχεται την κλήση στην κυψέλη  $c_0$  και ο αντίπαλος εμφανίζει κλήσεις στις κυψέλες  $c_1, \dots, c_5$  είναι  $\frac{1}{5}(t - q_0)$ . Όμοια, μέσος αριθμός εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος δεν αποδέχεται τις κλήσεις στις κυψέλες  $c_0, c_1, \dots, c_5$  και ο αντίπαλος εμφανίζει κλήσεις στις κυψέλες  $c_6, \dots, c_{12}$  είναι  $\frac{5}{7}(\frac{1}{5}(t - q_0) - q_1)$ . Επομένως,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}}[B_A(\sigma)] \leq \frac{q_0 + 5q_1 + 7\frac{5}{7}(\frac{1}{5}(t - q_0) - q_1)}{t} = 1,$$

και

$$c_A^{\mathcal{P}} \geq \frac{73}{35} = 2.086.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 28, καταλήγουμε στο ότι η τιμή αυτή αποτελεί ένα κάτω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης κάθε πιθανοτικού αλγορίθμου απέναντι σε αντίπαλους χωρίς μνήμη.  $\square$



## Κεφάλαιο 4

# Γραφήματα Δίσκων

### 4.1 Εισαγωγή

Μελετάμε δύο θεμελιώδη γραφοθεωρητικά προβλήματα, το πρόβλημα εύρεσης μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου και το πρόβλημα ελάχιστου χρωματισμού. Δεδομένου ενός γραφήματος  $G$ , το πρόβλημα εύρεσης του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου συνίσταται στην εύρεση ενός ανεξάρτητου συνόλου του  $G$  (δηλ., ενός συνόλου κορυφών του  $G$  μεταξύ των οποίων δεν υπάρχουν ακμές) μέγιστου μεγέθους, ενώ το πρόβλημα ελάχιστου χρωματισμού συνίσταται στην εύρεση μιας ανάθεσης χρωμάτων (που συμβολίζονται με θετικούς ακέραιους) στις κορυφές του γραφήματος έτσι ώστε δύο κορυφές που συνδέονται με ακμή να μη λαμβάνουν το ίδιο χρώμα και ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων χρωμάτων να ελαχιστοποιείται. Θεωρούμε γραφήματα τομής για την αναπαράσταση των τομών μεταξύ δίσκων στο επίπεδο.

Το γράφημα τομής ενός συνόλου δίσκων στο Ευκλείδειο επίπεδο είναι αυτό του οποίου κάθε κορυφή αντιστοιχεί σε έναν δίσκο και περιέχει μία ακμή μεταξύ δύο κορυφών αν και μόνον αν οι αντίστοιχοι δίσκοι επικαλύπτονται. Κάθε δίσκος ορίζεται από την ακτίνα και τις συντεταγμένες του κέντρου του. Δύο δίσκοι επικαλύπτονται αν η απόσταση των κέντρων τους είναι αυστηρά μικρότερη από το άθροισμα των ακτίνων τους. Ένα γράφημα  $G$  καλείται *γράφημα δίσκων* (*disk graph*) αν υπάρχει ένα σύνολο δίσκων στο Ευκλείδειο επίπεδο των οποίων το γράφημα τομής είναι το  $G$ . Το σύνολο των δίσκων καλείται αναπαράσταση του  $G$  με δίσκους. Ένα γράφημα δίσκων καλείται *γράφημα μοναδιαίων δίσκων* αν όλοι οι δίσκοι στην αναπαράστασή του έχουν την ίδια ακτίνα. Ένα γράφημα δίσκων είναι  $\sigma$ -φραγμένο αν ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη ακτίνα για όλους τους δίσκους της αναπαράστασής του είναι το πολύ  $\sigma$ .

Σε γραφήματα δίσκων, τα προβλήματα εύρεσης μέγιστου ανεξάρτητου συ-

νόλου και ελάχιστου χρωματισμού είναι σημαντικά αφού μπορούν να χρησιμοποιηθούν σα μοντέλα για προβλήματα ανάθεσης πόρων σε ασύρματα δίκτυα επικοινωνιών [29]. Θεωρούμε ένα σύνολο εκπομπών σε σταθερές θέσεις εντός μιας γεωγραφικής περιοχής. Κάθε εκπομπός χρησιμοποιεί μια συγκεκριμένη συχνότητα για εκπομπή. Δύο εκπομποί μπορούν επιτυχώς (δηλ., χωρίς παρεμβολές) να εκπέμψουν ταυτόχρονα είτε αν χρησιμοποιούν διαφορετικές συχνότητες ή αν χρησιμοποιούν την ίδια συχνότητα αλλά οι εμβέλειές τους δεν επικαλύπτονται. Δεδομένου ενός συνόλου εκπομπών σε ένα ασύρματο δίκτυο, για την εξασφάλιση επιτυχών ταυτόχρονων μεταδόσεων, τα σημαντικά προβλήματα που πρέπει να λυθούν είναι αυτό της κατανομής συχνοτήτων για το οποίο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του αριθμού των συχνοτήτων που χρησιμοποιούνται συνολικά στο δίκτυο, καθώς και το πρόβλημα ελέγχου αποδοχής κλήσεων όπου στόχος είναι η εύρεση ενός συνόλου μέγιστου μεγέθους από εκπομπούς που μπορούν να χρησιμοποιούν την ίδια συχνότητα. Θεωρώντας ότι όλοι οι εκπομποί έχουν κυκλική εμβέλεια, το γράφημα που αντικατοπτρίζει πιθανές παρεμβολές μεταξύ ζευγών εκπομπών είναι ένα γράφημα δίσκων. Τα προβλήματα κατανομής συχνοτήτων και ελέγχου αποδοχής κλήσεων είναι ισοδύναμα με τα προβλήματα εύρεσης ελάχιστου χρωματισμού και μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου, αντίστοιχα.

Ένα στιγμιότυπο του προβλήματος εύρεσης του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου ή του ελάχιστου χρωματισμού δεν περιλαμβάνει απαραίτητα την αναπαράσταση των δίσκων (δηλ., τις συντεταγμένες του κέντρου κάθε δίσκου και την ακτίνα του) του γραφήματος δίσκων σα δεδομένα του προβλήματος. Προφανώς, η τελευταία περίπτωση είναι δυσκολότερη. Δεν είναι εύκολο να εξαχθεί πληροφορία για την αναπαράσταση με δίσκους ενός γραφήματος δίσκων. Στην πραγματικότητα, ο καθορισμός του αν κάποιο γράφημα είναι ένα γράφημα δίσκων είναι ένα *NP*-πλήρες πρόβλημα [31].

Το πρόβλημα εύρεσης του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου σε γραφήματα δίσκων έχει αποδειχθεί ότι είναι υπολογιστικά δύσκολο (*NP-hard*) ακόμα και για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων ακόμα και στην περίπτωση που δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων σα δεδομένο του προβλήματος [10]. Ένας απλός αλγόριθμος εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων είναι ο αλγόριθμος *First-Fit*: ξεκινώντας από ένα κενό σύνολο, κατασκευάζει σταδιακά ένα ανεξάρτητο σύνολο εξετάζοντας τις κορυφές του γραφήματος με τυχαία σειρά και συμπεριλαμβάνοντας μία κορυφή στο ανεξάρτητο σύνολο μόνο αν καμία από τις γειτονικές τις δεν έχει ήδη συμπεριληφθεί. Ο αλγόριθμος *First-Fit* όταν εκτελείται για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων, έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ 5 και δε χρησιμοποιεί την αναπαράσταση των δίσκων [46] (υπονοείται επίσης στην εργασία [32]). Στην εργασία [46], παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος με συγκριτικό λόγο απόδοσης 3 μέσω του υπολογισμού μιας συγκεκριμένης διάταξης των κο-



ρυφών ενός γραφήματος μοναδιαίων δίσκων και της εκτέλεσης για αυτή τη διάταξη του αλγορίθμου First-Fit. Μια παραπλήσια ιδέα οδηγεί σε έναν αλγόριθμο με συγκριτικό λόγο απόδοσης 5 για γενικά γραφήματα δίσκων [46]. Επιπλέον, όπως παρατηρήθηκε στην εργασία [20], ένας αλγόριθμος για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων με συγκριτικό λόγο απόδοσης  $(2.5 + \epsilon)$  προκύπτει από ένα πιο γενικό αποτέλεσμα που παρουσιάστηκε στην εργασία [30]. Κανένας από τους παραπάνω αλγορίθμους δε χρησιμοποιεί την αναπαράσταση των δίσκων. Προσεγγιστικά σχήματα πολυωνυμικού χρόνου έχουν παρουσιαστεί τόσο για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων [34, 45] όσο και για γενικά γραφήματα [22, 9] στην περίπτωση που δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων.

Το πρόβλημα εύρεσης ελάχιστου χρωματισμού έχει επίσης αποδειχθεί ότι είναι υπολογιστικά δύσκολο στην εργασία [10, 27] ακόμα και στην περίπτωση γραφημάτων μοναδιαίων δίσκων. Πάλι μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος First-Fit. Εξετάζει τις κορυφές του γραφήματος με αυθαίρετη σειρά και δίνει στην κάθε κορυφή το μικρότερο χρώμα που δεν έχει εν τω μεταξύ δοθεί σε κάποια από τις γειτονικές της που έχουν ήδη εξεταστεί. Ο αλγόριθμος First-Fit υπολογίζει λύσεις με συγκριτικό λόγο απόδοσης 5 για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων [26, 46]. Εξετάζοντας τις κορυφές του γραφήματος με συγκεκριμένη σειρά, ο αλγόριθμος First-Fit υπολογίζει λύσεις με συγκριτικό λόγο απόδοσης 3 για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων [27, 46, 51]. Για γενικά γραφήματα δίσκων, μια παραλλαγή του αλγορίθμου First-Fit που εξετάζει τελευταίες τις κορυφές με μικρό βαθμό πετυχαίνει συγκριτικό λόγο απόδοσης 5 [26, 44, 46].

Όσον αφορά στις on-line παραλλαγές των προβλημάτων, το γράφημα δίσκων δε δίνεται από την αρχή αλλά αποκαλύπτεται σταδιακά. Σε κάθε βήμα, εμφανίζεται μία κορυφή του γραφήματος καθώς και εκείνες οι ακμές του που είναι προσκείμενες σε κορυφές που εμφανίστηκαν σε προηγούμενα βήματα (και ίσως, οι συντεταγμένες του κέντρου και/ή ακτίνα του αντίστοιχου δίσκου). Όταν εμφανίζεται μία κορυφή, ένας on-line αλγόριθμος εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων αποφασίζει είτε να αποδεχθεί την κορυφή συμπεριλαμβάνοντάς την στο ανεξάρτητο σύνολο είτε να την απορρίψει, ενώ ένας on-line αλγόριθμος χρωματισμού αποφασίζει ποιο χρώμα να αναθέσει στην κορυφή. Σε κάθε περίπτωση, οι αποφάσεις του αλγορίθμου δε μπορούν να αλλάξουν στο μέλλον.

Η εκτίμηση της απόδοσης ενός on-line αλγορίθμου πραγματοποιείται μέσω του υπολογισμού του συγκριτικού του λόγου απόδοσης (competitive ratio ή competitiveness). Όπως έχουμε ήδη περιγράψει στο Κεφάλαιο 1, στην περίπτωση on-line αλγορίθμων για την εύρεση ανεξάρτητων συνόλων, ο συγκριτικός λόγος απόδοσης ορίζεται ως το μέγιστο, για κάθε πιθανή ακολουθία δίσκων, του λόγου του μεγέθους του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου προς το μέγεθος του ανεξάρτητου συνόλου που υπολογίζεται από τον αλγόριθμο. Στην περίπτωση on-line αλγορίθμων χρωματισμού, ο συγκριτικός λόγος απόδοσης

ορίζεται ως το μέγιστο, για κάθε πιθανή ακολουθία δίσκων, του λόγου του αριθμού των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται από τον αλγόριθμο προς τον ελάχιστο αριθμό των χρωμάτων που είναι επαρκή για το χρωματισμό του γραφήματος.

Ο First-Fit είναι ουσιαστικά ένας on-line αλγόριθμος. Για το πρόβλημα εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων, έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης 5 για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων [32, 46] και  $O(\min\{n, \sigma^2\})$  για  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων με  $n$  κορυφές [20]. Όπως παρατηρήθηκε στην εργασία [20], ο αλγόριθμος First-Fit είναι βέλτιστος στην κλάση των ντετερμινιστικών on-line αλγορίθμων.

Ο αλγόριθμος First-Fit για χρωματισμό έχει μελετηθεί ευρύτατα σε γενικότερο πλαίσιο και έχει αποδειχθεί ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσής του είναι  $\Theta(\log n)$  για επαγωγικά γραφήματα με  $n$  κορυφές [35, 28]. Το κάτω φράγμα ισχύει και για δένδρα (που είναι γραφήματα δίσκων) κι επομένως το φράγμα  $\Theta(\log n)$  ισχύει και για γενικά γραφήματα δίσκων. Για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων, ο αλγόριθμος First-Fit έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ 5 [26, 46] ενώ για  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων με  $n$  κορυφές, έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ  $O(\min\{\log n, \sigma^2\})$  [19]. Για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων, ένα φράγμα με τιμή 2 για το συγκριτικό λόγο απόδοσης κάθε ντετερμινιστικού on-line αλγορίθμου παρουσιάζεται στην εργασία [24]. Το καλύτερο γνωστό κάτω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης ντετερμινιστικών αλγορίθμων χρωματισμού για  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων είναι  $\Omega(\min\{\log n, \log \log \sigma\})$  [19]. Όταν δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων, υπάρχουν καλύτεροι on-line αλγόριθμοι χρωματισμού για  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων. Οι περισσότεροι από αυτούς χρησιμοποιούν τον αλγόριθμο First-Fit σαν υπορουτίνα. Το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης σε αυτή την περίπτωση είναι  $O(\min\{\log n, \log \sigma\})$  [19].

Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε τις on-line παραλλαγές και των δύο προβλημάτων. Για το πρόβλημα εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων, εξετάζουμε το αν η χρήση τυχαιότητας βοηθά στην βελτίωση του συγκριτικού λόγου απόδοσης on-line αλγορίθμων, συμπεριλαμβανοντας το μοντέλο των κυψελικών δικτύων που είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Για πιθανοτικούς on-line αλγορίθμους εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων, ο συγκριτικός λόγος απόδοσης ορίζεται ως το μέγιστο για κάθε πιθανή ακολουθία δίσκων του λόγου του μεγέθους μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου προς την μέση τιμή του μεγέθους του ανεξάρτητου συνόλου που υπολογίζεται από τον αλγόριθμο. Πάλι, υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες των δίσκων επιλέγονται από αντιπάλους χωρίς μνήμη, δηλ., αντιπάλους που δε γνωρίζουν τις τυχαίες επιλογές των αλγορίθμων (αλλά ενδεχομένως γνωρίζουν την πιθανοτική κατανομή με βάση την οποία ο αλγόριθμος πραγματοποιεί τις τυχαίες επιλογές του). Αυτή είναι μια συνηθισμένη υπόθεση που γίνεται για πιθανοτικούς on-

line αλγόριθμους [7]. Αποδεικνύουμε ότι, γενικά, η χρήση τυχαιότητας δε βοηθάει απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη ακόμα και στην περίπτωση που δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων, δηλ., κατασκευάζουμε ακολουθίες δίσκων για τις οποίες κανένας (ακόμα και πιθανοτικός) on-line αλγόριθμος δε μπορεί να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από  $\Omega(n)$ . Για την περίπτωση που δε δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων, αποδεικνύουμε ένα κάτω φράγμα  $\Omega(\min\{n, \sigma^2\})$  για το συγκριτικό λόγο απόδοσης on-line αλγορίθμων για  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματος δίσκων με  $n$  κορυφές που σημαίνει ότι ο αλγόριθμος First-Fit είναι βέλτιστος ως προς ένα μικρό σταθερό παράγοντα. Για την περίπτωση  $\sigma$ -φραγμένων γραφημάτων δίσκων όταν δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων, παρουσιάζουμε πιθανοτικούς αλγόριθμους με συγκριτικό λόγο απόδοσης σχεδόν λογαριθμικό ως προς  $\sigma$  και αποδεικνύουμε ότι οι αλγόριθμοι αυτοί είναι βέλτιστοι. Για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων, παρουσιάζουμε έναν πιθανοτικό αλγόριθμο με συγκριτικό λόγο απόδοσης 4.41 (που είναι μικρότερος από το κάτω φράγμα με τιμή 5 για το συγκριτικό λόγο απόδοσης ντετερμινιστικών αλγορίθμων). Αποδεικνύουμε επίσης κάτω φράγματα με τιμές 2.5 και 3 για το συγκριτικό λόγο απόδοσης πιθανοτικών αλγορίθμων για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων. Τόσο τα αποτελέσματά μας για το on-line πρόβλημα εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων όσο και τα προηγούμενα γνωστά αποτελέσματα για ντετερμινιστικούς on-line αλγόριθμους συνοψίζονται στον Πίνακα 4.1. Για το πρόβλημα χρωματισμού, δείχνουμε πώς μπορεί να επιτευχθεί το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα  $O(\min\{\log n, \log \sigma\})$  για  $\sigma$ -φραγμένες ακολουθίες  $n$  δίσκων ακόμα κι αν δε δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων.

Γραφήματα	Αναπαρ. δίσκων	Κάτω φράγμα	Άνω φράγμα	Αλγ.
$\sigma$ -φραγμένα	Ναι	* $\Omega(\min\{n, \log \sigma\})$	* $O(\min\{n, \log \sigma\})$ * $O\left(\min\{n, \prod_{j=1}^{\log^*} \sigma^{-1} \log^{(j)} \sigma\}\right)$	Classify Guess
$\sigma$ -φραγμένα	Όχι	* $\Omega(\min\{n, \sigma^2\})$	$O(\min\{n, \sigma^2\})$	First-Fit
μοναδιαίων δίσκων	Ναι	* 2.5	* $\frac{8\sqrt{3}}{\pi} \approx 4.41$	Filter
μοναδιαίων δίσκων	Όχι	* 3	5	First-Fit

Πίνακας 4.1: Σύνοψη των αποτελεσμάτων για το on-line πρόβλημα εύρεσης μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου. Το σύμβολο (\*) δηλώνει αποτελέσματα στην παρούσα διατριβή.

Το υπόλοιπο κεφάλαιο είναι δομημένο ως εξής. Η Ενότητα 4.2 αναφέρεται στην on-line παραλλαγή του προβλήματος εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων σε  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων. Τα αποτελέσματά μας για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων παρουσιάζονται στην Ενότητα 4.3 ενώ ο αλγόριθμος χρωματισμού

παρουσιάζεται στην Ενότητα 4.4.

## 4.2 Εύρεση ανεξάρτητων συνόλων σε $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων

### 4.2.1 Άνω φράγματα

Σε αυτή ενότητα παρουσιάζουμε τον πιθανοτικό on-line αλγόριθμο Classify για τον υπολογισμό ανεξάρτητων συνόλων σε γραφήματα δίσκων. Ο αλγόριθμος έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $O(\min\{n, \log \sigma\})$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη σε  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων με  $n$  κορυφές. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί την τιμή του  $\sigma$  που υποτίθεται ότι είναι γνωστή εξ' αρχής και πραγματοποιεί τις τυχαίες επιλογές του βασιζόμενος στην αναπαράσταση των δίσκων. Παρά αυτούς τους περιορισμούς, αυτός είναι ο πρώτος αλγόριθμος που πετυχαίνει συγκριτικό λόγο απόδοσης λογαριθμικό ως προς  $\sigma$  και (όπως θα αποδείξουμε στην Ενότητα 4.2.2) είναι βέλτιστος μεταξύ των on-line αλγορίθμων που χρησιμοποιούν την αναπαράσταση των δίσκων.

Ο αλγόριθμος Classify λειτουργεί ως εξής. Όταν εμφανίζεται ο πρώτος δίσκος, ο αλγόριθμος ρίχνει ένα νόμισμα. Αν το αποτέλεσμα είναι ΚΟΡΩΝΑ, αποδέχεται το δίσκο και εκτελεί τον αλγόριθμο First-Fit για δίσκους με ακτίνες στο διάστημα  $[R, 2R)$ , όπου  $R$  είναι η ακτίνα του πρώτου δίσκου που εμφανίζεται, αγνοώντας (δηλ., απορρίπτοντας) όλους τους υπόλοιπους δίσκους. Αν το αποτέλεσμα είναι ΓΡΑΜΜΑΤΑ, ο αλγόριθμος διαλέγει ισοπίθανα έναν αριθμό  $i$  από το σύνολο  $\{-\lceil \log \sigma \rceil, -\lceil \log \sigma \rceil + 1, \dots, -1, 1, \dots, \lceil \log \sigma \rceil\}$  και εκτελεί τον αλγόριθμο First-Fit για δίσκους με ακτίνες στο διάστημα  $[R2^i, R2^{i+1})$ , αγνοώντας (δηλ., απορρίπτοντας) όλους τους υπόλοιπους δίσκους. Αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 33.** *Ο αλγόριθμος Classify για  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων με  $n$  κορυφές έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $O(\min\{n, \log \sigma\})$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.*

*Απόδειξη.* Προφανώς, αφού ο πρώτος δίσκος γίνεται αποδεκτός με πιθανότητα  $1/2$ , ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγορίθμου είναι  $O(n)$ . Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι ο αλγόριθμος έχει επίσης συγκριτικό λόγο απόδοσης  $O(\log \sigma)$ . Συμβολίζουμε με  $OPT$  το βέλτιστο ανεξάρτητο σύνολο για την ακολουθία. Για  $i = -\lceil \log \sigma \rceil, -\lceil \log \sigma \rceil - 1, \dots, \lceil \log \sigma \rceil$ , συμβολίζουμε με  $S_i$  το σύνολο των δίσκων με ακτίνες στο διάστημα  $[R2^i, R2^{i+1})$  και με  $OPT_i$  το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο για τους δίσκους που ανήκουν στο σύνολο  $S_i$ . Προφανώς, το  $|OPT_i| \geq |OPT \cap S_i|$  εφόσον  $OPT \cap S_i$  είναι ένα ανεξάρτητο

σύνολο για το σύνολο  $S_i$ . Υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος επιλέγει το σύνολο  $S_i$  και εκτελεί τον αλγόριθμο First-Fit για τους δίσκους αυτού του συνόλου. Παρατηρούμε ότι οι δίσκοι του συνόλου  $S_i$  αποτελούν έναν 2-φραγμένο γράφημα δίσκων. Σε τέτοιους γραφήματα, το ακόλουθο λήμμα εγγυάται την απόδοση του αλγορίθμου First-Fit για τον υπολογισμό ανεξάρτητων συνόλων.

**Λήμμα 34.** *Ο αλγόριθμος First-Fit έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης 15 για 2-φραγμένα γραφήματα δίσκων.*

*Απόδειξη.* Θα αποδείξουμε το λήμμα σε μια γενικότερη μορφή. Ουσιαστικά, δίνουμε μια εναλλακτική απόδειξη για το γεγονός ότι ο αλγόριθμος First-Fit έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ  $O(\sigma^2)$  για  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων. Έτσι, μπορούμε να δείξουμε ότι η κρυμμένη σταθερά στο συμβολισμό  $O(\sigma^2)$  είναι μικρή.

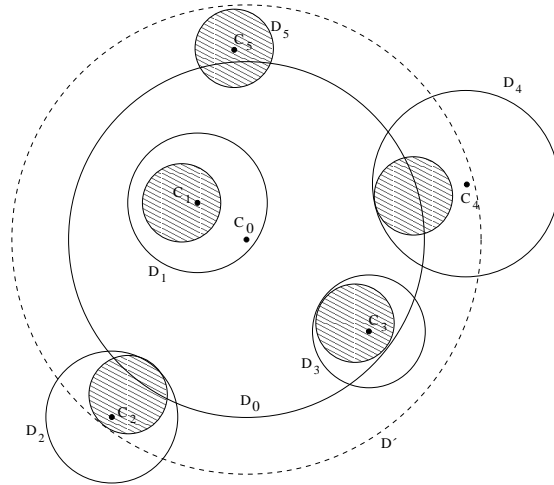
Θεωρούμε την εκτέλεση του αλγορίθμου First-Fit για κάποιο γράφημα. Το πλήθος των βέλτιστων κορυφών που μπορούν να αποκλειστούν από μία κορυφή που γίνεται δεκτό από τον αλγόριθμο First-Fit είναι το πολύ ίσο με το μέγεθος του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου στην γειτονιά της κορυφής αυτής. Θα αποδείξουμε ότι καμία κορυφή ενός  $\sigma$ -φραγμένου γραφήματος δίσκων δεν έχει ανεξάρτητο σύνολο με μέγεθος τουλάχιστον  $(\sigma + 2)^2$  στη γειτονιά του. Επομένως, ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγορίθμου First-Fit για  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων είναι το πολύ ίσος με το μεγαλύτερο ακέραιο που είναι αυστηρά μικρότερος από  $(\sigma + 2)^2$ . Για την περίπτωση που  $\sigma = 2$ , έχουμε ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγορίθμου First-Fit είναι το πολύ 15.

Θεωρούμε έναν δίσκο  $D_0$  με κέντρο το σημείο  $C_0$  και ακτίνα  $R$  και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο  $S$  που περιέχει τουλάχιστον  $(\sigma + 2)^2$  αμοιβαία μη επικαλυπτόμενους δίσκους οι οποίοι επικαλύπτονται με τον  $D_0$ . Καλούμε  $D_1, D_2, \dots, D_{|S|}$  τους δίσκους του συνόλου  $S$ . Για κάποιον δίσκο  $D_i$  ( $1 \leq i \leq |S|$ ), συμβολίζουμε με  $C_i$  το κέντρο του, με  $r_i$  την ακτίνα του και με  $d_i$  την απόσταση του κέντρου του  $C_i$  από το σημείο  $C_0$ .

Ορίζουμε  $r_{\min} = \min_{0 \leq i \leq |S|} \{r_i\}$ . Παρατηρούμε ότι το σύνολο  $S$  περιέχει το πολύ έναν δίσκο  $D_j$  που μπορεί να περιλαμβάνει το σημείο  $C_0$  (δηλ.,  $d_j < r_j$ ), διαφορετικά οι δίσκοι του συνόλου  $S$  δε θα ήταν μη επικαλυπτόμενοι. Αν υπάρχει ένας τέτοιος δίσκος  $D_j$  τότε, σίγουρα, η τομή του δίσκου  $D_j$  και του  $D_0$  περιέχει έναν δίσκο με ακτίνα  $r_{\min}$ .

Ορίζουμε τώρα το  $R' = 2r_{\min} + \max_{1 \leq i \leq |S|} \{d_i - r_i\}$  και έστω  $D'$  ο δίσκος με κέντρο το σημείο  $C_0$  και ακτίνα  $R'$ . Για κάθε δίσκο  $D_i$  που δεν περιλαμβάνει το σημείο  $C_0$  (δηλ.,  $d_i \geq r_i$ ), θεωρούμε το δίσκο με ακτίνα  $r_{\min}$  και κέντρο ένα σημείο στο τμήμα  $C_0C_i$  που βρίσκεται σε απόσταση  $d_i - r_i + r_{\min}$  από το  $C_0$ . Αυτός ο δίσκος περιέχεται εξ' ολοκλήρου στην τομή των δίσκων  $D_i$  και

$D'$ .



Σχήμα 4.1: Ο δίσκος  $D_0$  και 5 αμοιβαία μη επικαλυπτόμενοι δίσκοι που επικαλύπτονται με το δίσκο  $D_0$ . Οι γκρι δίσκοι σημαίνουν ότι ο δίσκος με τη μικρότερη ακτίνα περιέχεται εζ' ολοκλήρου στους δίσκους  $D_1, \dots, D_5$ .

Άρα, το συνολικό εμβαδόν των τομών των δίσκων του συνόλου  $S$  με το δίσκο  $D'$  είναι τουλάχιστον

$$\begin{aligned}
 (\sigma + 2)^2 \pi r_{\min}^2 &\geq \left( \frac{R}{r_{\min}} + 2 \right)^2 \pi r_{\min}^2 \\
 &= \pi (2r_{\min} + R)^2 \\
 &> \pi \left( 2r_{\min} + \max_{1 \leq i \leq |S|} \{d_i - r_i\} \right)^2 \\
 &= \pi R'^2.
 \end{aligned}$$

Η αυστηρή ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι όλοι οι δίσκοι του συνόλου  $S$  επικαλύπτονται με το δίσκο  $D_0$ . Έχουμε επομένως δείξει ότι το συνολικό εμβαδόν των τομών των δίσκων του συνόλου  $S$  με το δίσκο  $D'$  είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του δίσκου  $D'$ , γεγονός που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι οι δίσκοι του συνόλου  $S$  είναι αμοιβαία μη επικαλυπτόμενοι.  $\square$

Καλούμε  $B$  τον αριθμό των δίσκων που ο αλγόριθμος Classify κάνει αποδεκτούς και  $B_i$  τον αριθμό των δίσκων που κάνει αποδεκτούς αν υποθέσουμε

ότι επιλέγει το σύνολο  $S_i$  και εκτελεί τον αλγόριθμο First-Fit για δίσκους αυτού του συνόλου. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα, δείχνουμε ότι ο αλγόριθμος αποδέχεται τουλάχιστον

$$B_i \geq \frac{1}{15}|OPT_i| \geq \frac{1}{15}|OPT \cap S_i|$$

δίσκους από το σύνολο  $S_i$ . Η μέση τιμή του μεγέθους του ανεξάρτητου συνόλου που υπολογίζεται από τον αλγόριθμο Classify είναι

$$\begin{aligned} E[B] &= \sum_{i=-\lceil \log \sigma \rceil}^{\lfloor \log \sigma \rfloor} (\Pr[\text{να επιλεγεί το σύνολο } S_i] \cdot B_i) \\ &\geq \frac{1}{15} \sum_{i=-\lceil \log \sigma \rceil}^{\lfloor \log \sigma \rfloor} (\Pr[\text{να επιλεγεί το σύνολο } S_i] \cdot |OPT \cap S_i|) \\ &\geq \frac{1}{15} \min_i \{\Pr[\text{να επιλεγεί το σύνολο } S_i]\} \cdot |OPT| \\ &\geq \frac{1}{60 \lceil \log \sigma \rceil} \cdot |OPT|. \end{aligned}$$

Επομένως, ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγορίθμου είναι  $O(\log \sigma)$ .  $\square$

Παρουσιάζουμε τώρα τον αλγόριθμο Guess που έχει ελαφρώς χειρότερο συγκριτικό λόγο απόδοσης αλλά δεν απαιτεί γνώση εξ' αρχής ούτε του  $n$  ούτε του  $\sigma$ .

Θεωρούμε μια ακολουθία  $n$  δίσκων και έστω  $R$  η ακτίνα του πρώτου δίσκου της ακολουθίας. Τότε, ορίζουμε τα ακόλουθα (ενδεχομένως κενά) ξένα μεταξύ τους σύνολα δίσκων. Για κάθε  $i = 0, 1, \dots, 2\lceil \log \sigma \rceil - 1$ , ορίζουμε το σύνολο  $S_i$  των δίσκων με ακτίνες τουλάχιστον  $R/2^{\lceil \log \sigma \rceil - i}$  και μικρότερες από  $R/2^{\lceil \log \sigma \rceil - i - 1}$ . Καλούμε κάθε τέτοιο σύνολο  $i$ -ό σύνολο για κάποιο  $i \geq 1$  αν όταν εμφανίζεται στην ακολουθία ο πρώτος δίσκος του συγκεκριμένου συνόλου, έχουν ήδη εμφανιστεί δίσκοι από ακριβώς  $i - 1$  διαφορετικά σύνολα. Όταν εμφανίζεται ο πρώτος δίσκος ενός συνόλου, ο αλγόριθμος αποφασίζει με κάποια πιθανότητα αν θα λάβει υπόψη του δίσκους από αυτό το συγκεκριμένο σύνολο και κατά συνέπεια θα αγνοήσει όλους τους δίσκους των υπόλοιπων συνόλων.

Ορίζουμε τη συνάρτηση  $\alpha : [1, +\infty) \rightarrow R^+$  ως εξής:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{1}{\log e} (\lceil \log x \rceil + 1) \alpha(\lfloor \log x \rfloor), \quad \text{αν } x \geq 2 \\ \alpha(x) &= \frac{2 \log e}{4 \log e - 5}, \quad \text{αν } 2 > x \geq 1 \end{aligned}$$

Όταν εμφανίζεται ο πρώτος δίσκος του  $i$ -ού συνόλου, ο αλγόριθμος ρίχνει ένα νόμισμα με

$$\Pr[\text{ΚΟΡΩΝΑ}] = \begin{cases} 1/2 & \text{για } i \in \{1, 2\} \\ \frac{1}{\alpha(i-2)(i-1)} & \text{για } i \geq 3 \end{cases}$$

Αν το αποτέλεσμα είναι ΚΟΡΩΝΑ, ο αλγόριθμος αποφασίζει να εκτελέσει τον αλγόριθμο First-Fit για τους δίσκους αυτού του συνόλου και αγνοεί (δηλ., απορρίπτει) τους δίσκους όλων των άλλων συνόλων· αν το αποτέλεσμα είναι ΓΡΑΜΜΑΤΑ, ο αλγόριθμος απορρίπτει όλους τους δίσκους του συνόλου.

**Θεώρημα 35.** *Ο αλγόριθμος Guess έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης το πολύ  $O\left(\min\left\{n, \prod_{j=1}^{\log^* \sigma-1} \log^{(j)} \sigma\right\}\right)$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη σε σ-φραγμένα γραφήματα δίσκων με  $n$  κορυφές.*

*Απόδειξη.* Αρχικά, παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος Guess κάνει αποδεκτό τον πρώτο δίσκο της ακολουθίας με πιθανότητα  $1/2$ . Επομένως, ο συγκριτικός λόγος απόδοσης είναι  $O(n)$ . Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσης είναι επίσης  $O\left(\prod_{j=1}^{\log^* \sigma-1} \log^{(j)} \sigma\right)$ .

Η απόδειξη ακολουθεί την ίδια διαδικασία με την απόδειξη του Θεωρήματος 33. Συμβολίζουμε με  $OPT$  το βέλτιστο ανεξάρτητο σύνολο της ακολουθίας και έστω  $\kappa \leq 1 + \lceil \log \sigma \rceil$  ο αριθμός των διαφορετικών συνόλων. Για κάθε  $i = 0, 1, \dots, \kappa$ , συμβολίζουμε με  $S'_i$  το  $i$ -ό σύνολο, με  $OPT_i$  το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο μεταξύ των δίσκων του συνόλου  $S'_i$ , και με  $\mathcal{E}_i$  το γεγονός που δηλώνει ότι ο αλγόριθμος Guess αποφασίζει να εκτελέσει το αλγόριθμο First-Fit για δίσκους του  $i$ -ού συνόλου. Είναι:  $|OPT_i| \geq |OPT \cap S'_i|$ , αφού το σύνολο  $OPT \cap S'_i$  αποτελεί ένα ανεξάρτητο σύνολο για το  $S'_i$ . Υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος επιλέγει το σύνολο  $S'_i$  και εκτελεί τον αλγόριθμο First-Fit για τους δίσκους αυτού του συνόλου. Αφού, για κάθε  $i = 1, \dots, \kappa$ , οι δίσκοι του συνόλου  $S'_i$  αποτελούν ένα 2-φραγμένο γράφημα δίσκων, υποθέτοντας ότι ο αλγόριθμος επιλέγει το σύνολο  $S'_i$  και εκτελεί τον αλγόριθμο First-Fit για τους δίσκους αυτού του συνόλου, από το Λήμμα 34, συμπεραίνουμε ότι ο αλγόριθμος κάνει αποδεκτούς

$$B_i \geq \frac{1}{15} |OPT_i| \geq \frac{1}{15} |OPT \cap S'_i|$$

δίσκους του συνόλου  $S'_i$ . Η μέση τιμή του μεγέθους του ανεξάρτητου συνόλου



που υπολογίζει ο αλγόριθμος **Guess** είναι:

$$\begin{aligned} E[B] &= \sum_{i=1}^{\kappa} (\Pr[\mathcal{E}_i] \cdot B_i) \\ &\geq \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{\kappa} (\Pr[\mathcal{E}_i] \cdot |OPT \cap S_i|) \\ &\geq \frac{1}{15} \min_i \{\Pr[\mathcal{E}_i]\} \cdot |OPT|. \end{aligned}$$

Επομένως, για να αποδείξουμε ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγορίθμου **Guess** είναι  $O\left(\prod_{j=1}^{\log^* \sigma^{-1}} \log^{(j)} \sigma\right)$ , θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι για κάθε  $i = 1, \dots, \kappa$ , ισχύει  $\Pr[\mathcal{E}_i] \in \Omega\left(\frac{1}{\prod_{j=1}^{\log^* \sigma^{-1}} \log^{(j)} \sigma}\right)$ .

Για κάθε  $i = 1, \dots, \kappa$ , η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός  $\mathcal{E}_i$  ισούται με την πιθανότητα να απορριφθούν δίσκοι από τα πρώτα  $i - 1$  σύνολα (αν υπάρχουν) επί την πιθανότητα να επιλεγεί το  $i$ -ό σύνολο. Προφανώς,  $\Pr[\mathcal{E}_1] = 1/2$ ,  $\Pr[\mathcal{E}_2] = 1/4$ ,  $\Pr[\mathcal{E}_3] = \frac{4 \log e - 5}{16 \log e}$ , ενώ για  $i \geq 4$ , είναι

$$\Pr[\mathcal{E}_i] = \frac{1}{4} \left( \prod_{j=1}^{i-3} \left(1 - \frac{1}{\alpha(j)(j+1)}\right) \right) \frac{1}{\alpha(i-2)(i-1)}.$$

Για να φράξουμε από κάτω αυτή την πιθανότητα, χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες τρεις τεχνικές προτάσεις.

**Πρόταση 36.** Για κάθε  $\beta \in [1, +\infty)$  και ακέραιο  $i > 1$ , ισχύει:

$$\prod_{j=i_1}^{i_2} \left(1 - \frac{1}{\beta(j+1)}\right) \geq \left(\frac{i_1}{i_2+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

*Απόδειξη.* Αρχικά αποδεικνύουμε ότι, για κάθε  $j \geq 1$ , είναι

$$\beta \left(1 + \frac{1}{j}\right) - \frac{1}{j} \geq \beta \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{1 - \frac{1}{\beta}} \quad (4.1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $F : [1, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται ως

$$F(\beta) = \beta \left(1 + \frac{1}{j}\right) - \frac{1}{j} - \beta \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{1 - \frac{1}{\beta}}.$$

Η πρώτη παράγωγός της είναι

$$\begin{aligned}
F'(\beta) &= \left(1 + \frac{1}{j}\right) - \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{1-\frac{1}{\beta}} - \frac{1}{\beta} \ln \left(1 + \frac{1}{j}\right) \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{1-\frac{1}{\beta}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{1-\frac{1}{\beta}} \left( \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{\beta}} - 1 - \frac{1}{\beta} \ln \left(1 + \frac{1}{j}\right) \right) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα  $x \geq 1 + \ln x$ , για κάθε  $x \geq 1$ . Αφού η συνάρτηση  $F(\cdot)$  είναι μη-αύξουσα και  $F(1) = 0$ , συνεπάγεται ότι  $F(\beta) \geq 0$ , για κάθε  $\beta \in [1, +\infty)$ , και, επομένως, ισχύει η σχέση (4.1).

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=i_1}^{i_2} \left(1 - \frac{1}{\beta(j+1)}\right) &= \frac{1}{\beta^{i_2-i_1+1}} \prod_{j=i_1}^{i_2} \frac{\beta j + \beta - 1}{j+1} \\
&= \frac{1}{\beta^{i_2-i_1+1}} \left( \prod_{j=i_1}^{i_2} \left( \beta \left(1 + \frac{1}{j}\right) - \frac{1}{j} \right) \right) \prod_{j=i_1}^{i_2} \frac{j}{j+1} \\
&\geq \frac{i_1}{(i_2+1)\beta^{i_2-i_1+1}} \prod_{j=i_1}^{i_2} \left( \beta \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{1-\frac{1}{\beta}} \right) \\
&= \frac{i_1}{i_2+1} \left( \prod_{j=i_1}^{i_2} \frac{j+1}{j} \right)^{1-\frac{1}{\beta}} \\
&= \left( \frac{i_1}{i_2+1} \right)^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}$$

□

**Πρόταση 37.** Για κάθε  $i > 0$ , ισχύει

$$\prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{1}{\alpha(j)(j+1)}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{2\alpha(1)}\right)^{\log^* i+1}.$$

*Απόδειξη.* Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$\prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{1}{\alpha(j)(j+1)}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{2\alpha(1)}\right)^{\lfloor \log i \rfloor} \prod_{j=1}^{\lfloor \log i \rfloor} \left(1 - \frac{1}{\alpha(j)(j+1)}\right) \quad (4.2)$$

Το λήμμα θα προκύψει από την εφαρμογή της ανισότητας (4.2) αναδρομικά.

Από την Πρόταση 36 και τον ορισμό της συνάρτησης  $\alpha(\cdot)$ , συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{1}{\alpha(j)(j+1)}\right) &\geq \prod_{j=0}^{\lfloor \log i \rfloor} \prod_{j'=2^j}^{2^{j+1}-1} \left(1 - \frac{1}{\alpha(j')(j'+1)}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2\alpha(1)}\right) \prod_{j=1}^{\lfloor \log i \rfloor} \prod_{j'=2^j}^{2^{j+1}-1} \left(1 - \frac{1}{\alpha(j')(j'+1)}\right) \\
&\geq \left(1 - \frac{1}{2\alpha(1)}\right) \prod_{j=1}^{\lfloor \log i \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha(2^j)}} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2\alpha(1)}\right) \prod_{j=1}^{\lfloor \log i \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\log e}{\alpha(j)(j+1)}} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2\alpha(1)}\right) \prod_{j=1}^{\lfloor \log i \rfloor} e^{-\frac{1}{\alpha(j)(j+1)}} \\
&\geq \left(1 - \frac{1}{2\alpha(1)}\right) \prod_{j=1}^{\lfloor \log i \rfloor} \left(1 - \frac{1}{\alpha(j)(j+1)}\right),
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι  $e^{-x} \geq 1 - x$ , για κάθε  $x \geq 0$ .  $\square$

**Πρόταση 38.** Για κάθε  $i \geq 1$ , ισχύει

$$\alpha(i) \leq \left(\frac{5}{4 \log e}\right)^{\log^* i - 2} \frac{4}{\log^2 e} \alpha(1) \prod_{j=1}^{\log^* i} \log^{(j)} i.$$

Απόδειξη. Προφανώς, αν  $\log^* i = 0$ , δηλ.,  $i \in [1, 2)$ , τότε είναι

$$\alpha(i) = \alpha(1) \leq \frac{64}{25} \alpha(1) = \left(\frac{5}{4 \log e}\right)^{-2} \frac{4}{\log^2 e} \alpha(1).$$

Αν  $\log^* i = 1$ , δηλ.,  $i \in [2, 4)$ , τότε είναι

$$\begin{aligned}\alpha(i) &= \frac{1}{\log e} \alpha(\lfloor \log i \rfloor)(\lfloor \log i \rfloor + 1) \\ &\leq \frac{2}{\log e} \alpha(1) \log i \\ &\leq \frac{16}{5 \log e} \alpha(1) \log i \\ &= \left( \frac{5}{4 \log e} \right)^{-1} \frac{4}{\log^2 e} \alpha(1) \log i.\end{aligned}$$

Όμοια, αν  $\log^* i = 2$ , δηλ.,  $i \in [4, 16)$ , τότε

$$\begin{aligned}\alpha(i) &= \frac{1}{\log e} \alpha(\lfloor \log i \rfloor)(\lfloor \log i \rfloor + 1) \\ &\leq \frac{1}{\log^2 e} \alpha(\lfloor \log \lfloor \log i \rfloor \rfloor)(\lfloor \log i \rfloor + 1)(\lfloor \log \lfloor \log i \rfloor \rfloor + 1) \\ &\leq \frac{4}{\log^2 e} \alpha(1) \log i \log \log i \\ &= \left( \frac{5}{4 \log e} \right)^{-1} \frac{4}{\log^2 e} \alpha(1) \log i \log \log i.\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι  $\log^* i > 2$ , δηλ.,  $i \geq 16$ . Έχουμε τότε ότι:

$$\begin{aligned}\alpha(i) &= \frac{1}{\log e} \alpha(\lfloor \log i \rfloor)(\lfloor \log i \rfloor + 1) \\ &\leq \frac{5}{4 \log e} \alpha(\log i) \log i \\ &\leq \dots \\ &\leq \left( \frac{5}{4 \log e} \right)^{\log^* i - 2} \alpha(\log^{(\log^* i - 2)} i) \prod_{j=1}^{\log^* i - 2} \log^{(j)} i \\ &\leq \left( \frac{5}{4 \log e} \right)^{\log^* i - 2} \frac{4}{\log^2 e} \alpha(1) \prod_{j=1}^{\log^* i} \log^{(j)} i.\end{aligned}$$

Η ανισότητα στη δεύτερη γραμμή προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση  $\alpha(\cdot)$  είναι μη-αύξουσα και από την παρατήρηση ότι για κάθε  $i' \geq 16$ , ισχύει  $\lfloor \log i' \rfloor + 1 \leq \frac{5}{4} \log i'$ . Η τρίτη γραμμή προκύπτει από αναδρομικές εφαρμογές αυτής της ανισότητας, ενώ η τελευταία ανισότητα ισχύει αφού  $\log^{(\log^* i - 2)} i \in [4, 16)$ . Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη της Πρότασης.  $\square$

Χρησιμοποιώντας τις Προτάσεις 37 και 38 και αντικαθιστώντας  $\alpha(1) = \frac{2 \log e}{4 \log e - 5}$ , παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \Pr[\mathcal{E}_i] &= \\ &\frac{1}{4} \left( \prod_{j=1}^{i-3} \left( 1 - \frac{1}{\alpha(j)(j+1)} \right) \right) \frac{1}{\alpha(i-2)(i-1)} \geq \\ &\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{2\alpha(1)} \right)^{\log^*(i-3)+1} \frac{1}{\alpha(i-2)(i-1)} \geq \\ &\frac{1}{4} \left( \frac{5}{4 \log e} \right)^{\log^*(i-3)+1} \frac{1}{(i-1) \left( \frac{5}{4 \log e} \right)^{\log^*(i-2)-2} \frac{4}{\log^2 e} \alpha(1) \prod_{j=1}^{\log^*(i-2)} \log^{(j)}(i-2)} \geq \\ &\frac{125(4 \log e - 5)}{2048 \log^2 e (i-1) \prod_{j=1}^{\log^*(i-2)} \log^{(j)}(i-2)} \end{aligned}$$

Αφού ο αριθμός των διαφορετικών συνόλων  $\kappa$  είναι το πολύ  $1 + \lceil \log \sigma \rceil < 2 + \log \sigma$ , έχουμε ότι

$$\Pr[\mathcal{E}_i] \in \Omega \left( \frac{1}{\prod_{j=1}^{\log^* \sigma - 1} \log^{(j)} \sigma} \right)$$

κι έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος.  $\square$

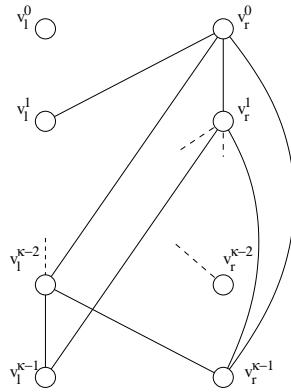
#### 4.2.2 Κάτω φράγματα

Τα κάτω φράγματα που αποδεικνύονται σε αυτή την Ενότητα δηλώνουν ότι, γενικά, η χρήση τυχαιότητας δε βοηθά, δηλ., υπάρχουν ακολουθίες  $n$  δίσκων για τις οποίες κάθε on-line αλγόριθμος έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\Omega(n)$  ακόμα κι αν δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων. Για  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων, το ακόλουθο κάτω φράγμα δηλώνει ότι αν δε δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων, δεν υπάρχουν on-line αλγόριθμοι με συγκριτικό λόγο απόδοσης λογαριθμικό ως προς  $\sigma$ .

**Θεώρημα 39.** *Κάθε πιθανοτικός on-line αλγόριθμος για τον υπολογισμό ανεξάρτητων συνόλων σε  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων με  $n$  κορυφές έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\Omega(\min\{n, \sigma^2\})$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη, αν δε δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων.*

Απόδειξη. Έστω  $\kappa$  ένας θετικός ακέραιος. Θα κατασκευάσουμε έναν αντίπαλο που παράγει ένα γράφημα  $G_\kappa$  που έχει ένα ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους  $\kappa + 1$  έτσι ώστε η μέση τιμή του μεγέθους του ανεξάρτητου συνόλου που μπορεί να υπολογίσει οποιοσδήποτε πιθανοτικός on-line αλγόριθμος για το γράφημα  $G_\kappa$  να είναι το πολύ 2.

Το γράφημα  $G_\kappa$  που παράγεται από τον αντίπαλο ορίζεται ως εξής. Οι κορυφές του γραφήματος  $G_\kappa$  ομαδοποιούνται σε  $\kappa$  επίπεδα  $0, 1, \dots, \kappa - 1$ . Κάθε επίπεδο  $i$  έχει δύο κορυφές: μία αριστερή κορυφή  $v_i^l$  και μία δεξιά κορυφή  $v_i^r$ . Οι δύο κορυφές κάθε επιπέδου δεν επικαλύπτονται. Αρχικά, ο αντίπαλος παράγει τους δύο κορυφές του επιπέδου 0. Για  $i = 1, \dots, \kappa - 1$ , οι κορυφές του επιπέδου  $i$  παράγονται αφού έχουν εμφανιστεί οι κορυφές του επιπέδου  $i - 1$ . Ο αντίπαλος ρίχνει ένα νόμισμα για να συνδέσει τις κορυφές του επιπέδου  $i$  με κορυφές μικρότερων επιπέδων. Αν το αποτέλεσμα είναι ΚΟΡΩΝΑ, συνδέει και τις δύο κορυφές του επιπέδου  $i$  με την κορυφή  $v_{i-1}^{i-1}$  και με όλες τις κορυφές των επιπέδων  $i - 2, i - 3, \dots, 0$  με τις οποίες είναι συνδεδεμένη η κορυφή  $v_{i-1}^{i-1}$ . αν το αποτέλεσμα είναι ΓΡΑΜΜΑΤΑ, συνδέει και τις δύο κορυφές του επιπέδου  $i$  με την κορυφή  $v_{i-1}^{i-1}$  και με όλες τις κορυφές των επιπέδων  $i - 2, \dots, 0$  με τις οποίες είναι συνδεδεμένη η κορυφή  $v_{i-1}^{i-1}$ .



Σχήμα 4.2: Ένα παράδειγμα για το γράφημα  $G_\kappa$ .

Θεωρούμε το σύνολο των κορυφών που αποτελείται από δύο κορυφές του επιπέδου  $\kappa - 1$  και, για  $i = 0, \dots, \kappa - 2$ , από την κορυφή του επιπέδου  $i$  που δεν είναι συνδεδεμένη με κορυφές ανώτερων επιπέδων. Αυτό είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο του γραφήματος  $G_\kappa$ . Επομένως, το μέγεθος του βέλτιστου ανεξάρτητου συνόλου του γραφήματος  $G_\kappa$  είναι τουλάχιστον  $\kappa + 1$ .

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το μέγεθος του ανεξάρτητου συνόλου του γραφήματος  $G_\kappa$  που κάθε (ενδεχομένως πιθανοτικός) on-line αλγόριθμος μπο-

ρεί να υπολογίσει είναι το πολύ 2. Θεωρούμε την εκτέλεση του αλγορίθμου  $A$  σε  $t$  ακολουθίες δίσκων που παράγονται από τον αντίπαλο. Συμβολίζουμε με  $l_i$  τον αριθμό των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος αποδέχεται την αριστερή κορυφή του επιπέδου  $i$ , με  $r_i$  το πλήθος των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος αποδέχεται τη δεξιά κορυφή του επιπέδου  $i$ , και με  $b_i$  τον αριθμό των εκτελέσεων του αλγορίθμου κατά τις οποίες ο αλγόριθμος αποδέχεται και τις δύο κορυφές του επιπέδου  $i$ .

Για  $i = 0, 1, \dots, \kappa-1$ , έστω  $X_i$  τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει τον αριθμό των εκτελέσεων κατά τις οποίες οι κορυφές που εμφανίζονται στο επίπεδο  $i$  δε υπόκεινται σε περιορισμούς λόγω κορυφών μικρότερων επιπέδων (δηλ., δεν είναι συνδεδεμένοι με κορυφές σε μικρότερα επίπεδα που έχουν γίνει δεκτοί από τον αλγόριθμο). Τότε, οι κορυφές του επιπέδου  $i+1$  υπόκεινται σε περιορισμούς μόνο αν:

- η αριστερή κορυφή του επιπέδου  $i$  έχει απορριφθεί και οι κορυφές του επιπέδου συνδέονται με την αριστερή κορυφή του επιπέδου  $i$  ή
- η δεξιά κορυφή του επιπέδου  $i$  έχει απορριφθεί και οι κορυφές του επιπέδου  $i+1$  συνδέονται με τη δεξιά κορυφή του επιπέδου  $i$ .

Επομένως,

$$E[X_{i+1}|X_i] \leq X_i - \frac{r_i + l_i}{2} - b_i$$

και

$$E[X_{\kappa-1}] \leq t - \sum_{i=0}^{\kappa-2} \frac{r_i + l_i + 2b_i}{2} \Rightarrow \sum_{i=0}^{\kappa-2} (r_i + l_i + 2b_i) \leq 2t - 2E[X_{\kappa-1}] \quad (4.3)$$

Αφού ο αριθμός των εκτελέσεων κατά τις οποίες ο αλγόριθμος αποδέχεται τουλάχιστον μία κορυφή από το επίπεδο  $\kappa-1$  είναι το πολύ ίσος με τον αριθμό των εκτελέσεων κατά τις οποίες οι κορυφές του επιπέδου  $\kappa-1$  δεν υπόκεινται σε περιορισμούς, είναι  $r_{\kappa-1} + l_{\kappa-1} + b_{\kappa-1} \leq E[X_{\kappa-1}]$ . Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.3), παίρνουμε ότι η μέση τιμή του μεγέθους του ανεξάρτητου συνόλου  $B(G_\kappa)$  που υπολογίζει ο αλγόριθμος είναι

$$\begin{aligned}
E[|B(G_\kappa)|] &= \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{\kappa-1} (r_i + l_i + 2b_i) \\
&= \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{\kappa-2} (r_i + l_i + 2b_i) + \frac{1}{t} (r_{\kappa-1} + l_{\kappa-1} + 2b_{\kappa-1}) \\
&\leq 2 - \frac{1}{t} (2E[X_{\kappa-1}] - (r_{\kappa-1} + l_{\kappa-1} + 2b_{\kappa-1})) \\
&\leq 2 - \frac{2}{t} (E[X_{\kappa-1}] - (r_{\kappa-1} + l_{\kappa-1} + b_{\kappa-1})) \\
&\leq 2.
\end{aligned}$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγορίθμου είναι τουλάχιστον  $\frac{\kappa+1}{2}$ .

Αυτό που μένει να δείξουμε είναι ότι το γράφημα  $G_\kappa$  για  $\kappa = \Omega(\min\{n, \sigma^2\})$  είναι ένα  $\sigma$ -φραγμένο γράφημα δίσκων.

**Λήμμα 40.** Για κάθε  $\sigma \geq 2$  και  $n \geq 8$ , το γράφημα  $G_{4d^2}$  για

$$d = \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sigma + 2}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \sqrt{\frac{n}{8}} \right\rfloor \right\}$$

είναι ένα  $\sigma$ -φραγμένο γράφημα δίσκων με το πολύ  $n$  κορυφές.

Απόδειξη. Έστω  $\sigma \geq 2$  και ένας ακέραιος  $n \geq 8$ . Ορίζουμε ως

$$d = \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sigma + 2}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \sqrt{\frac{n}{8}} \right\rfloor \right\}.$$

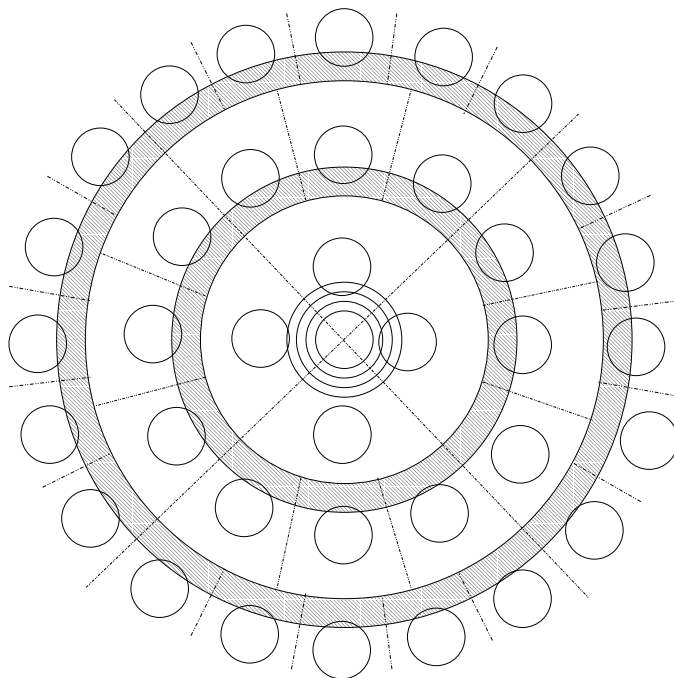
Προφανώς, το γράφημα  $G_{4d^2}$  έχει  $8d^2 \leq n$  κορυφές. Θα δείξουμε ότι και το γράφημα  $G_{4d^2}$  είναι ένα  $\sigma$ -φραγμένο γράφημα δίσκων.

Θα κατασκευάσουμε την ακόλουθη αναπαράσταση του γραφήματος  $G_{4d^2}$  με δίσκους. Το σύνολο αποτελείται από  $8d^2$  δίσκους και χωρίζεται σε  $d$  ζένα μεταξύ τους σύνολα τα οποία ονομάζουμε δακτυλίους. Για  $i = 1, \dots, d$ , ο δακτύλιος  $i$  περιέχει  $8i - 4$  δίσκους τους οποίους ονομάζουμε πλανήτες και  $8i - 4$  δίσκους τους οποίους ονομάζουμε δορυφόρους. Όλοι οι πλανήτες έχουν τον ίδιο κέντρο και όλοι οι δορυφόροι έχουν μοναδιαία ακτίνα.

Σε κάθε δακτύλιο  $i$ , ο  $j$ -ός πλανήτης (για  $j = 0, \dots, 8i - 5$ ) έχει ακτίνα  $4(i - 1) + 1 + \frac{j}{8i - 5}$ . Παρατηρούμε ότι όλοι οι πλανήτες έχουν ακτίνες μεταξύ 1 και  $4d - 2 \leq \sigma$ . Επομένως, το γράφημα δίσκων που κατασκευάζουμε είναι  $\sigma$ -φραγμένο. Θα δείξουμε επίσης ότι η συγκεκριμένη είναι μια αναπαράσταση με δίσκους για το γράφημα  $G_{4d^2}$ .



Για να εντοπίσουμε τους δορυφόρους του δακτυλίου  $i$ , επιλέγουμε  $8i - 4$  ημιευθείες που ξεκινούν από το κέντρο των πλανητών οι οποίες χωρίζουν το επίπεδο σε  $8i - 4$  ισομεγέθεις τομείς. Το κέντρο του  $j$ -ού δορυφόρου του δακτυλίου  $i$  βρίσκεται στη διχοτόμο του τομέα  $j$  και απέχει  $4(i-1) + 2 + \frac{2j+1}{16i-10}$  από το κέντρο των πλανητών. Η κατασκευή για  $d = 3$  φαίνεται στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Η κατασκευή της ακολουθίας των δίσκων που παράγεται από τον αντίπαλο για την απόδειξη του Λήμματος 6. Οι γκρι δακτύλιοι συμβολίζουν τις περιφέρειες των πλανητών που ανήκουν στον ίδιο δακτύλιο.

Θεωρούμε το γράφημα  $G_{4d^2}$  και έστω  $v_p^i$  η κορυφή του επιπέδου  $i$  που είναι συνδεδεμένη με κορυφές υψηλότερων επιπέδων. Συμβολίζουμε με  $v_s^i$  την άλλη κορυφή του επιπέδου  $i$ . Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο των δίσκων που κατασκευάσαμε αποτελεί μια αναπαράσταση του γραφήματος  $G_{4d^2}$  με δίσκους. Συγκεκριμένα, θα απεικονίσουμε κάθε κορυφή του γραφήματος  $G_{4d^2}$  σε έναν δίσκο και θα δείξουμε ότι, για κάθε ζεύγος κορυφών μεταξύ των οποίων υπάρχει ακμή στο γράφημα  $G_{4d^2}$ , οι αντίστοιχοι δίσκοι επικαλύπτονται και ότι, για κάθε ζεύγος κορυφών μεταξύ των οποίων δεν υπάρχει ακμή στο γράφημα  $G_{4d^2}$ , οι αντίστοιχοι δίσκοι δεν επικαλύπτονται.

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\ell(i, j)$  που συμβολίζει τη θέση του  $j$ -ού πλανήτη

του δακτυλίου  $i$  στη λίστα των πλανητών ταξινομημένη με βάση την ακτίνα τους από το μεγαλύτερο στον μικρότερο. Αφού (i) κάθε δακτύλιος περιέχει ίδιο αριθμό από πλανήτες και δορυφόρους, (ii) ο  $j$ -ός πλανήτης του δακτυλίου  $i$  έχει μεγαλύτερη ακτίνα από τους πλανήτες  $0, \dots, j-1$  του δακτυλίου  $i$  και από όλους τους πλανήτες των δακτυλίων  $1, \dots, i-1$ , και (iii) ο  $j$ -ός δορυφόρος του δακτυλίου  $i$  απέχει περισσότερο από το κέντρο των πλανητών από όσο οι δορυφόροι  $0, \dots, j-1$  του δακτυλίου  $i$  και όλοι οι δορυφόροι των δακτυλίων  $1, \dots, i-1$ , η συνάρτηση  $\ell(i, j)$  συμβολίζει επίσης τη θέση του  $j$ -ού δορυφόρου του δακτυλίου  $i$  στη λίστα των δορυφόρων ταξινομημένη με βάση την απόστασή τους από το κέντρο των πλανητών από το μεγαλύτερο στο μικρότερο. Προφανώς, αν  $\ell(i_1, j_1) \geq \ell(i_2, j_2)$ , τότε είναι είτε  $i_1 \leq i_2$  ή  $i_1 = i_2$  και  $j_1 \leq j_2$ .

Αντιστοιχίζουμε τον  $j$ -ό πλανήτη του δακτυλίου  $i$  στην κορυφή  $v_p^{\ell(i,j)}$  του γραφήματος  $G_{4d^2}$  και τον  $j$ -ό δορυφόρο του δακτυλίου  $i$  στην κορυφή  $v_s^{\ell(i,j)}$  του γραφήματος  $G_{4d^2}$ .

Θεωρούμε ένα ζεύγος κορυφών  $v_p^{\xi_1}$  και  $v_p^{\xi_2}$  μεταξύ των οποίων υπάρχει ακμή στο γράφημα  $G_{4d^2}$ . Οι αντίστοιχοι δίσκοι είναι πλανήτες και σίγουρα επικαλύπτονται αφού έχουν κοινό κέντρο.

Θεωρούμε ένα ζεύγος κορυφών  $v_p^{\xi_1}$  και  $v_s^{\xi_2}$  μεταξύ των οποίων υπάρχει ακμή στο γράφημα  $G_{4d^2}$ . Τότε, από τον ορισμό του γραφήματος  $G_{4d^2}$ , πρέπει να ισχύει  $\xi_1 < \xi_2$ . Οι αντίστοιχοι δίσκοι είναι ο  $j_1$ -ός πλανήτης του δακτυλίου  $i_1$  και ο  $j_2$ -ός δορυφόρος του δακτυλίου  $i_2$  έτσι ώστε να είναι  $\ell(i_1, j_1) = \xi_1$  και  $\ell(i_2, j_2) = \xi_2$ . Αφού  $\xi_1 < \xi_2$ , ισχύει είτε  $i_1 > i_2$  ή  $i_1 = i_2$  και  $j_1 > j_2$ . Στην πρώτη περίπτωση ( $i_1 > i_2$ ), το άθροισμα των ακτίνων του  $j_1$ -ού πλανήτη του δακτυλίου  $i_1$  και του  $j_2$ -ού δορυφόρου του δακτυλίου  $i_2$  είναι

$$\begin{aligned} 4(i_1 - 1) + 2 + \frac{j_1}{8i_1 - 5} &\geq 4i_2 + 2 \\ &> 4(i_2 - 1) + 2 + \frac{2j_2 + 1}{16i_2 - 10} \end{aligned}$$

που ισούται με την απόσταση του κέντρου του  $j_2$ -ού δορυφόρου του δακτυλίου  $i_2$  από το κέντρο των πλανητών. Στη δεύτερη περίπτωση ( $i_1 = i_2$  και  $j_1 > j_2$ ), το άθροισμα των ακτίνων του  $j_1$ -ού πλανήτη και του  $j_2$ -ού δορυφόρου του δακτυλίου  $i_1$  είναι

$$\begin{aligned} 4(i_1 - 1) + 2 + \frac{j_1}{8i_1 - 5} &\geq 4(i_1 - 1) + 2 + \frac{j_2 + 1}{8i_1 - 5} \\ &> 4(i_2 - 1) + 2 + \frac{2j_2 + 1}{16i_2 - 10} \end{aligned}$$

που ισούται με την απόσταση του κέντρου του  $j_2$ -ού δορυφόρου του δακτυλίου  $i_2$  από το κέντρο των πλανητών. Επομένως, και στις δύο περιπτώσεις, οι δύο δίσκοι επικαλύπτονται.

Θεωρούμε ένα ζεύγος κορυφών  $v_p^{\xi_1}$  και  $v_s^{\xi_2}$  μεταξύ των οποίων δεν υπάρχει ακμή στο γράφημα  $G_{4d^2}$ . από τον ορισμό του  $G_{4d^2}$ , ισχύει  $\xi_1 \geq \xi_2$ . Οι αντίστοιχοι δίσκοι είναι ο  $j_1$ -ός πλανήτης του δακτυλίου  $i_1$  και ο  $j_2$ -ός δορυφόρος του δακτυλίου  $i_2$  έτσι ώστε  $\ell(i_1, j_1) = \xi_1$  και  $\ell(i_2, j_2) = \xi_2$ . Αφού  $\xi_1 \geq \xi_2$ , ισχύει είτε  $i_1 < i_2$  ή  $i_1 = i_2$  και  $j_1 \leq j_2$ . Στην πρώτη περίπτωση ( $i_1 < i_2$ ), το άθροισμα των ακτίνων του  $j_1$ -ού πλανήτη του δακτυλίου  $i_1$  και του  $j_2$ -ού δορυφόρου του δακτυλίου  $i_2$  είναι

$$\begin{aligned} 4(i_1 - 1) + 2 + \frac{j_1}{8i_1 - 5} &\leq 4(i_2 - 2) + 3 \\ &< 4(i_2 - 1) + 2 + \frac{2j_2 + 1}{16i_2 - 10} \end{aligned}$$

που ισούται με την απόσταση του κέντρου του  $j_2$ -ού δορυφόρου του δακτυλίου  $i_2$  από το κέντρο των πλανητών. Στη δεύτερη περίπτωση ( $i_1 = i_2$  και  $j_1 \leq j_2$ ), το άθροισμα των ακτίνων του  $j_1$ -ού πλανήτη και του  $j_2$ -ού δορυφόρου του δακτυλίου  $i_1$  είναι

$$\begin{aligned} 4(i_1 - 1) + 2 + \frac{j_1}{8i_1 - 5} &\leq 4(i_1 - 1) + 2 + \frac{2j_1 + 1}{16i_1 - 10} \\ &\leq 4(i_2 - 1) + 2 + \frac{2j_2 + 1}{16i_2 - 10} \end{aligned}$$

που ισούται με την απόσταση του κέντρου του  $j_2$ -ού δορυφόρου του δακτυλίου  $i_2$  από το κέντρο των πλανητών. Επομένως, και στις δύο περιπτώσεις, οι δύο δίσκοι δεν επικαλύπτονται.

Τέλος, θεωρούμε ένα ζεύγος κορυφών  $v_s^{\xi_1}$  και  $v_s^{\xi_2}$  που δε συνδέονται με ακμή στο γράφημα  $G_{4d^2}$ . Οι αντίστοιχοι δίσκοι είναι δορυφόροι. Θα δείξουμε ότι ποτέ δύο δορυφόροι δεν επικαλύπτονται. Θεωρούμε αρχικά τον  $j_1$ -ό δορυφόρο του δακτυλίου  $i_1$  και τον  $j_2$ -ό δορυφόρο του δακτυλίου  $i_2 > i_1$ . Η διαφορά των αποστάσεων των κέντρων των δύο δορυφόρων από το κέντρο των πλανητών είναι

$$\begin{aligned} 4(i_2 - 1) + 2 + \frac{2j_2 + 1}{16i_2 - 10} - 4(i_1 - 1) - 2 - \frac{2j_1 + 1}{16i_1 - 10} &> \\ 4(i_2 - i_1) - \frac{2j_1 + 1}{16i_1 - 10} &> 4(i_2 - i_1) - 2 \geq 2 \end{aligned}$$

γεγονός που σημαίνει ότι οι δύο δορυφόροι (που έχουν μοναδιαίες ακτίνες) δεν επικαλύπτονται. Για να δείξουμε ότι ποτέ δυο δορυφόροι που ανήκουν στον ίδιο δακτύλιο δεν επικαλύπτονται, θα δείξουμε ότι κανένας δορυφόρος δεν ξεπερνάει τα όρια του τομέα στον οποίο ανήκει. Θεωρούμε τον  $j$ -ό δορυφόρο του δακτυλίου  $i$ . Η γωνία που ορίζεται από τη διχοτόμο του τομέα  $i$  που περιέχει το δορυφόρο και από ένα από τις πλευρές του είναι  $\frac{\pi}{8i-4}$ . Έστω  $\delta$  η απόσταση του κέντρου του δορυφόρου από την πλευρά του τομέα  $j$ . Παρατηρούμε ότι η απόσταση του κέντρου του δορυφόρου από το κέντρο των πλανητών είναι μεγαλύτερη από  $4i - 2$ . Επομένως,

$$\begin{aligned} \delta &> (4i - 2) \sin \frac{\pi}{8i - 4} \\ &\geq (4i - 2) \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{8i - 4} \\ &= 1, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι για κάθε  $x \in [0, \pi/4]$ , ισχύει  $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ . □

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. □

Το κάτω φράγμα του Θεωρήματος 39 προφανώς δεν ισχύει όταν δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων. Στην περίπτωση αυτή, ένας πολύ απλός ντετερμινιστικός on-line αλγόριθμος που θα έκανε αποδεκτούς μοναδιαίους δίσκους (οποτεδήποτε αυτό ήταν δυνατό) και θα απέρριπτε όλους τους υπόλοιπους δίσκους θα ήταν βέλτιστος για ακολουθίες δίσκων που παράγονται από τον αντίπαλο του Θεωρήματος 39.

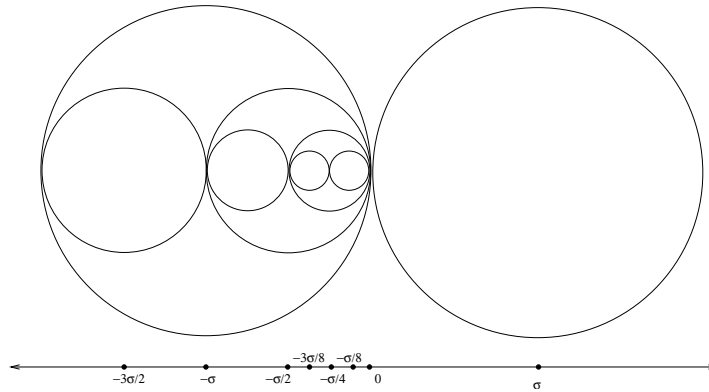
Το ακόλουθο θεώρημα δίνει ένα κάτω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης on-line αλγορίθμων εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων όταν δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων και στην ουσία δηλώνει ότι ο αλγόριθμος Classify είναι βέλτιστος στα πλαίσια σταθερών παραγόντων.

**Θεώρημα 41.** *Κάθε πιθανοτικός on-line αλγόριθμος για τον υπολογισμό ανεξάρτητων συνόλων σε  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων με  $n$  κορυφές έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\Omega(\min\{n, \log \sigma\})$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.*

*Απόδειξη.* Δεδομένου  $\sigma \geq 1$  και ενός ακεραίου  $n \geq 2$ , θα κατασκευάσουμε έναν αντίπαλο που παράγει ένα  $\sigma$ -φραγμένο γράφημα δίσκων με το πολύ  $n$  κορυφές. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή του Θεωρήματος 39 με τη μόνη διαφορά ότι, σε κάθε επίπεδο, ο αντίπαλος αποκαλύπτει την αναπαράσταση των

δίσκων στον αλγόριθμο. Επομένως, ένας αλγόριθμος που εφαρμόζεται για μια ακολουθία δίσκων που παράγεται από τον αντίπαλο μπορεί να χρησιμοποιήσει την αναπαράσταση των δίσκων για να πραγματοποιήσει τις τυχαίες επιλογές τους.

Έστω  $\kappa = \lfloor \min\{n/2, 1 + \log \sigma\} \rfloor$ . Ο αντίπαλος παράγει μια ακολουθία δίσκων  $\mathcal{D}$  σε  $\kappa$  επίπεδα  $0, 1, \dots, \kappa - 1$ , έτσι ώστε κάθε επίπεδο να έχει δύο δίσκους. Τα κέντρα όλων των δίσκων βρίσκονται πάνω σε μία γραμμή κι επομένως χρησιμοποιούμε μόνο μία συντεταγμένη για τα προσδιορίσουμε. Αρχικά, ο αντίπαλος εμφανίζει δύο δίσκους με ακτίνες  $\sigma$  στο επίπεδο 0 με κέντρα τα σημεία με συντεταγμένες  $c_l^0 = -\sigma$  και  $c_r^0 = \sigma$ . Για  $i = 1, \dots, \kappa - 1$ , οι δύο δίσκοι του επιπέδου  $i$  έχουν ακτίνες  $\sigma/2^i$  και παρουσιάζονται μετά τους δίσκους του επιπέδου  $i - 1$ . Έστω  $c_l^{i-1}, c_r^{i-1} = c_l^{i-1} + \sigma/2^{i-2}$  οι συντεταγμένες των κέντρων των δίσκων του επιπέδου  $i - 1$ . Ο αντίπαλος ρίχνει ένα νόμισμα για να προσδιορίσει τους δίσκους του επιπέδου  $i$ . Αν το αποτέλεσμα είναι ΚΟΡΩΝΑ, τα κέντρα των δίσκων είναι τα σημεία  $c_l^i = c_l^{i-1} - \sigma/2^i$  και  $c_r^i = c_l^{i-1} + \sigma/2^i$ . αν το αποτέλεσμα είναι ΓΡΑΜΜΑΤΑ, τα κέντρα των δίσκων είναι τα σημεία  $c_r^i = c_l^{i-1} + \sigma/2^{i-2} - \sigma/2^i$  και  $c_l^i = c_l^{i-1} + \sigma/2^{i-2} + \sigma/2^i$ , αντίστοιχα.  $c_l^i = c_l^{i-1} + \sigma/2^{i-2} + \sigma/2^i$ , αντίστοιχα. Από τον ορισμό του  $\kappa$ , είναι προφανές ότι η κατασκευή μας παρέχει ένα  $\sigma$ -φραγμένο γράφημα δίσκων με το πολύ  $n$  κορυφές. Η κατασκευή φαίνεται στο Σχήμα 4.4.



Σχήμα 4.4: Η κατασκευή μιας ακολουθίας δίσκων  $\mathcal{D}$  που παράγεται από τον αντίπαλο για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.

Παρατηρούμε ότι οι δίσκοι του ίδιου επιπέδου δεν επικαλύπτονται και, για  $i = 0, \dots, \kappa - 2$ , όλοι οι δίσκοι που παράγονται μετά τους δίσκους του επιπέδου  $i$  επικαλύπτονται με ακριβώς έναν από τους δύο δίσκους του επιπέδου  $i$ . Το γράφημα τομής για την ακολουθία  $\mathcal{D}$  είναι το γράφημα  $G_\kappa$  που χρησιμο-

ποιήθηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 39 για  $\kappa = \lfloor \min\{n/2, 1 + \log \sigma\} \rfloor$ . Παρατηρούμε ότι, σε κάθε επίπεδο, και οι δύο δίσκοι έχουν την ίδια ακτίνα, επικαλύπτονται με το ίδιο σύνολο δίσκων μικρότερων επιπέδων, και όλοι οι δίσκοι που θα παρουσιαστούν σε επόμενα επίπεδα επιλέγονται ισοπίθανα ώστε να επικαλύπτονται με ακριβώς έναν από αυτούς. Επομένως, δεν εξάγεται στην ουσία παραπάνω πληροφορία από την αναπαράσταση των δίσκων σε κάθε επίπεδο και η απόδειξη ολοκληρώνεται όπως και αυτή του Θεωρήματος 39 δηλώνοντας ότι κανένας αλγόριθμος δε μπορεί να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από  $\frac{\kappa+1}{2}$ .  $\square$

### 4.3 Εύρεση ανεξάρτητων συνόλων σε γραφήματα μοναδιαίων δίσκων

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζουμε νέα άνω και κάτω φράγματα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης on-line πιθανοτικών αλγορίθμων εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων.

Αρχικά παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο *Filter*, ένα on-line πιθανοτικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό ανεξάρτητων συνόλων σε γραφήματα μοναδιαίων δίσκων. Αποδεικνύουμε ότι ο αλγόριθμος έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\frac{8\sqrt{3}}{\pi} \approx 4.41$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.

Στην αρχή, ο αλγόριθμος *Filter* επιλέγει τα  $\alpha$  και  $\beta$  ομοιόμορφα και τυχαία από τα διαστήματα  $[0, 4)$  και  $[0, 2\sqrt{3})$ , αντίστοιχα.<sup>1</sup>

Όταν ένας καινούριος δίσκος με κέντρο το σημείο  $(x, y)$  εμφανίζεται, ο αλγόριθμος κάνει τα ακόλουθα: Αν υπάρχουν ακέραιοι  $\kappa, \lambda$  τέτοιοι ώστε το σημείο  $(x + \alpha, y + \beta)$  να απέχει λιγότερο από 1 από το σημείο με συντεταγμένες  $(4\kappa + 2(\lambda \bmod 2), 2\lambda\sqrt{3})$ , τότε ο *Filter* εκτελεί τον αλγόριθμο *First-Fit*, διαφορετικά αγνοεί το δίσκο.

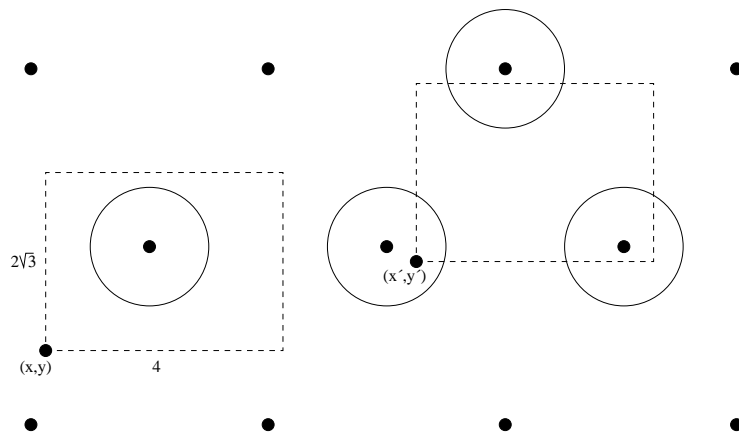
**Θεώρημα 42.** *Ο αλγόριθμος *Filter* έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\frac{8\sqrt{3}}{\pi}$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την εκτέλεση του αλγορίθμου *Filter* σε μια ακολουθία  $\mathcal{D}$  δίσκων μοναδιαίας ακτίνας. Έστω  $\mathcal{D}'$  (τυχαία) υπακολουθία της  $\mathcal{D}$  που

<sup>1</sup>Αξίζει να σημειωθεί ότι δίνουμε αυτόν τον ορισμό του αλγορίθμου *Filter* για να κάνουμε απλούστερη την παρουσίασή του. Για να κάνουμε πιο πρακτικό τον αλγόριθμο, μπορούμε να τον τροποποιήσουμε ώστε να επιλέγει το  $\beta$  ομοιόμορφα και τυχαία στο διάστημα  $[0, \delta)$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $\delta > 2\sqrt{3}$  και να χρησιμοποιεί σημεία με συντεταγμένες  $(4\kappa + 2(\lambda \bmod 2), \lambda\delta)$  αντί για  $(4\kappa + 2(\lambda \bmod 2), 2\lambda\sqrt{3})$ . Τότε, χρησιμοποιώντας την ίδια ανάλυση με αυτή του Θεωρήματος 42, μπορούμε να δείξουμε ότι αλγόριθμος *Filter* έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $\frac{4\delta}{\pi}$  απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.

αποτελείται από δίσκους που δεν έχουν απορριφθεί από τον αλγόριθμο. Συμβολίζουμε με  $A(\mathcal{D})$  το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο της ακολουθίας  $\mathcal{D}$  και με  $B(\mathcal{D})$  το σύνολο των δίσκων που γίνονται αποδεκτοί από τον αλγόριθμο.

Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η πιθανότητα να μην απορριφθεί ένας δίσκος από τον αλγόριθμο είναι  $\frac{\pi}{8\sqrt{3}}$ . Θεωρούμε έναν δίσκο  $D$  με κέντρο το σημείο  $(x, y)$  και το παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τα διαγώνια σημεία  $(x, y)$  και  $(x + 4, y + 2\sqrt{3})$ . Επίσης, θεωρούμε τους μοναδιαίους δίσκους που περιέχουν τα σημεία που απέχουν λιγότερο από 1 από τα σημεία  $\varepsilon$  συντεταγμένες  $(4\kappa + 2(\lambda \bmod 2), 2\lambda\sqrt{3})$  για ακέραια  $\kappa$  και  $\lambda$ , και παρατηρούμε ότι το συνολικό εμβαδόν της τομής των δίσκων αυτών με το παραλληλόγραμμο ισούται με το εμβαδόν ενός δίσκου με ακτίνα 1 (βλέπε Σχήμα 4.5). Αφού το σημείο  $(x + \alpha, y + \beta)$  είναι ομοιόμορφα καταναμημένο στο παραλληλόγραμμο, η πιθανότητα ένας δίσκος  $D$  να μην απορριφθεί από τον αλγόριθμο Filter ισούται με το λόγο του εμβαδού ενός δίσκου με ακτίνα 1 προς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου, δηλ.,  $\frac{\pi}{8\sqrt{3}}$ .



Σχήμα 4.5: Το κέντρο  $(x, y)$  ενός δίσκου και το παραλληλόγραμμο στο οποίο το σημείο  $(x + \alpha, y + \beta)$  είναι ομοιόμορφα καταναμημένο.

Θεωρούμε το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο  $A(\mathcal{D})$  και έστω  $A'(\mathcal{D})$  ένα (τυχαίο) υποσύνολο του  $A(\mathcal{D})$  που αποτελείται από τους δίσκους του  $A(\mathcal{D})$  που δεν έχουν απορριφθεί από τον αλγόριθμο Filter. Προφανώς, το  $A'(\mathcal{D})$  είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο για το σύνολο δίσκων  $\mathcal{D}'$ , κι επομένως, είναι  $|A(\mathcal{D}')| \geq |A'(\mathcal{D})|$ . από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής, παίρνουμε ότι  $|A'(\mathcal{D})| = \frac{\pi}{8\sqrt{3}}|A(\mathcal{D})|$  που σημαίνει ότι

$$E[|A(\mathcal{D}')|] \geq \frac{\pi}{8\sqrt{3}}|A(\mathcal{D})| \quad (4.4)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος τομής που ορίζεται από τους δίσκους του συνόλου  $\mathcal{D}'$  είναι κλίκα. Ειδικότερα, θεωρούμε δύο σημεία  $O_1$  με συντεταγμένες  $(4\kappa_1 + 2(\lambda_1 \bmod 2), 2\lambda_1\sqrt{3})$  και  $O_2$  με συντεταγμένες  $(4\kappa_2 + 2(\lambda_2 \bmod 2), 2\lambda_2\sqrt{3})$  τέτοια ώστε είτε  $\kappa_1 \neq \kappa_2$  ή  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  και τρεις δίσκους  $D_1, D_2$ , και  $D_3$  με κέντρα τα σημεία  $C_1, C_2$ , και  $C_3$  με συντεταγμένες  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , και  $(x_3, y_3)$ , αντίστοιχα. Επίσης, συμβολίζουμε με  $C'_1, C'_2$ , και  $C'_3$  τα σημεία με συντεταγμένες  $(x_1 + \alpha, y_1 + \beta)$ ,  $(x_2 + \alpha, y_2 + \beta)$ , και  $(x_3 + \alpha, y_3 + \beta)$ , αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι τα σημεία  $C_1$  και  $C_3$  απέχουν λιγότερο από 1 από το σημείο  $O_1$ , και ότι το σημείο  $C_2$  απέχει λιγότερο από 1 από το σημείο  $O_2$ . Θα δείξουμε ότι οι δίσκοι  $D_1$  και  $D_3$  επικαλύπτονται ενώ οι δίσκοι  $D_1$  και  $D_2$  δεν είναι μεταξύ τους επικαλυπτόμενοι. Προφανώς, είναι  $|C_1C_3| = |C'_1C'_3|$  και από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι  $|C_1C_3| \leq |C'_1O_1| + |O_1C'_2| < 2$ . Επομένως, οι δίσκοι  $D_1$  και  $D_3$  επικαλύπτονται. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι αν είτε  $\kappa_1 \neq \kappa_2$  είτε  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , είναι  $|O_1O_2| \geq 4$ . Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι  $|O_1C'_1| + |C'_1C'_2| + |C'_2O_2| \geq 4$ . Προφανώς,  $|C'_1C'_2| = |C_1C_2|$  και αφού  $|O_1C'_1| < 1$  και  $|C'_2O_2| < 1$ , ισχύει επίσης ότι  $|C_1C_2| > 2$  που σημαίνει ότι οι δίσκοι  $D_1$  και  $D_2$  δεν επικαλύπτονται.

Αφού κάθε συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος τομής  $\mathcal{D}'$  είναι κλίκα, το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο στη γειτονιά ενός δίσκου έχει μέγεθος το πολύ 1. Άρα, κάθε δίσκος που γίνεται αποδεκτός από τον αλγόριθμο Filter μπορεί να εμποδίσει το πολύ έναν δίσκο του συνόλου  $A(\mathcal{D}')$ . Επομένως, για την υπακολουθία  $\mathcal{D}'$  των δίσκων που δεν απορρίπτονται από τον αλγόριθμο Filter, ισχύει  $B(\mathcal{D}') \geq |A(\mathcal{D}')|$  που συνεπάγεται ότι  $E[B(\mathcal{D}')] \geq E[|A(\mathcal{D}')|]$ . Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.4), καταλήγουμε στο ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του αλγόριθμου Filter είναι

$$\frac{|A(\mathcal{D})|}{E[B(\mathcal{D}')] } \leq \frac{8\sqrt{3}}{\pi}.$$

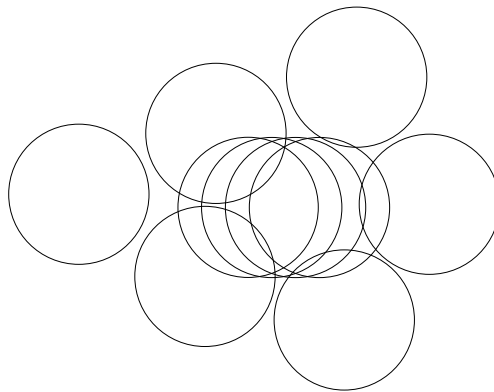
□

Προσαρμόζοντας τις κατασκευές της Ενότητας 4.2.2 για το κάτω φράγμα στην περίπτωση γραφημάτων μοναδιαίων δίσκων, καταλήγουμε στο ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 43.** *Κανένας on-line (πιθανοτικός) αλγόριθμος για τον υπολογισμό ανεξάρτητων συνόλων σε γραφήματα μοναδιαίων δίσκων δεν έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από 3 απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη αν δε δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων. Ακόμα και στην περίπτωση που δίνεται η αναπαράσταση, κανένας on-line (πιθανοτικός) αλγόριθμος δεν έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από 2.5 απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη.*



Απόδειξη. Η απόδειξη για το πρώτο μέρος είναι ίδια με αυτή του Θεωρήματος 39. Κατασκευάζουμε έναν αντίπαλο που παράγει το γράφημα  $G_5$  και αποδεικνύουμε ότι το γράφημα  $G_5$  είναι ένα γράφημα μοναδιαίων δίσκων. Μια αναπαράσταση του γραφήματος  $G_5$  με μοναδιαίους δίσκους παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.6.

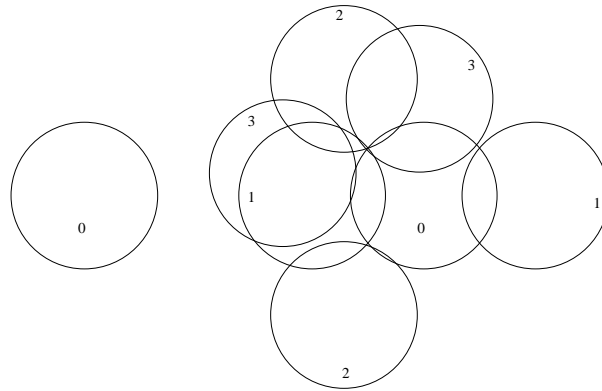


Σχήμα 4.6: Η κατασκευή των ακολουθιών δίσκων που παράγονται από τον αντίπαλο για την απόδειξη του πρώτου μέρους του Θεωρήματος 43.

Η απόδειξη του δεύτερου μέρους είναι όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 41 και εγγυάται ότι όλοι οι μοναδιαίοι δίσκοι κάθε επιπέδου εκτός του τελευταίου τοποθετούνται κατά τέτοιο τρόπο (δηλ., συμμετρικά) ώστε κανένας αλγόριθμος να μη μπορεί να κερδίσει κάτι αν γνωρίζει την αναπαράσταση των δίσκων. Στη συνέχεια, δείχνουμε πώς ο αντίπαλος παράγει μια αναπαράσταση των δίσκων του γραφήματος  $G_4$  με τις παραπάνω ιδιότητες.

Αρχικά, ο αντίπαλος παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 0 με κέντρα τα σημεία με συντεταγμένες  $(-2, 0)$  και  $(2, 0)$ . Στη συνέχεια, ρίχνει ένα νόμισμα. Αν το αποτέλεσμα είναι:

- ΚΟΡΩΝΑ, παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 1 με κέντρα σημεία με συντεταγμένες  $(-3.3, 0)$  και  $(-0.7, 0)$ . Στη συνέχεια, ρίχνει ένα νόμισμα. Αν το αποτέλεσμα είναι:
  - ΚΟΡΩΝΑ, παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 2 με κέντρα σημεία με συντεταγμένες  $(-3, 1.7)$  και  $(-3, -1.7)$ . Στη συνέχεια, ρίχνει ένα νόμισμα. Αν το αποτέλεσμα είναι:
    - \* ΚΟΡΩΝΑ, παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 3 με κέντρα σημεία με συντεταγμένες  $(-3.7, 0.2)$  και  $(-2.1, 1.5)$  και δεν εμφανίζει άλλους δίσκους.



Σχήμα 4.7: Ένα παράδειγμα για την κατασκευή των ακολουθιών δίσκων που παράγονται από τον αντίπαλο για την απόδειξη του δεύτερου μέρους του Θεωρήματος 43.

- \* ΓΡΑΜΜΑΤΑ, παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 3 με κέντρα σημεία με συντεταγμένες  $(-3.7, -0.2)$  και  $(-2.1, -1.5)$  και δεν εμφανίζει άλλους δίσκους.
- ΓΡΑΜΜΑΤΑ, παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 2 με κέντρα σημεία με συντεταγμένες  $(-1, 1.7)$  και  $(-1, -1.7)$ . Στη συνέχεια, ρίχνει ένα νόμισμα. Αν το αποτέλεσμα είναι:
  - \* ΚΟΡΩΝΑ, παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 3 με κέντρα σημεία με συντεταγμένες  $(-0.3, 0.2)$  και  $(-1.9, 1.5)$  και δεν εμφανίζει άλλους δίσκους.
  - \* ΓΡΑΜΜΑΤΑ, παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 3 με κέντρα σημεία με συντεταγμένες  $(-0.3, -0.2)$  και  $(-1.9, -1.5)$  και δεν εμφανίζει άλλους δίσκους.
- ΓΡΑΜΜΑΤΑ, παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 1 με κέντρα σημεία με συντεταγμένες  $(0.7, 0)$  και  $(3.3, 0)$ . Στη συνέχεια, ρίχνει ένα νόμισμα. Αν το αποτέλεσμα είναι:
  - ΚΟΡΩΝΑ, παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 2 με κέντρα σημεία με συντεταγμένες  $(1, 1.7)$  και  $(1, -1.7)$ . Στη συνέχεια, ρίχνει ένα νόμισμα. Αν το αποτέλεσμα είναι:
    - \* ΚΟΡΩΝΑ, παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 3 με κέντρα σημεία με συντεταγμένες  $(0.3, 0.2)$  και  $(1.9, 1.5)$  και δεν εμφανίζει άλλους δίσκους.

- \* ΓΡΑΜΜΑΤΑ, παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 3 με κέντρα σημεία με συντεταγμένες  $(0.3, -0.2)$  και  $(1.9, -1.5)$  και δεν εμφανίζει άλλους δίσκους.
- ΓΡΑΜΜΑΤΑ, παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 2 με κέντρα σημεία με συντεταγμένες  $(3, 1.7)$  και  $(3, -1.7)$ . Στη συνέχεια, ρίχνει ένα νόμισμα. Αν το αποτέλεσμα είναι:
  - \* ΚΟΡΩΝΑ, παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 3 με κέντρα σημεία με συντεταγμένες  $(3.7, 0.2)$  και  $(2.1, 1.5)$  και δεν εμφανίζει άλλους δίσκους.
  - \* ΓΡΑΜΜΑΤΑ, παράγει δύο μοναδιαίους δίσκους στο επίπεδο 3 με κέντρα σημεία με συντεταγμένες  $(3.7, -0.2)$  και  $(2.1, -1.5)$  και δεν εμφανίζει άλλους δίσκους.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι σε κάθε περίπτωση (ανάλογα με το αποτέλεσμα της ρίψης των νομισμάτων) το σύνολο των δίσκων που προκύπτει αποτελεί αναπαράσταση του γραφήματος  $G_4$ . Ένα παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 4.7.  $\square$

#### 4.4 Ένα άνω φράγμα για on-line χρωματισμό

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε έναν on-line αλγόριθμο χρωματισμού για γραφήματα δίσκων που δεν απαιτεί την αναπαράσταση των δίσκων. Ο αλγόριθμος πετυχαίνει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $O(\min\{\log n, \log \sigma\})$  για το χρωματισμό  $\sigma$ -φραγμένων ακολουθιών  $n$  δίσκων. Αυτό είναι και το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα στην περίπτωση που δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων. Ο αλγόριθμος αποτελεί συνδυασμό του αλγορίθμου First-Fit και του αλγορίθμου Layered που παρουσιάζεται στη συνέχεια.

Ο αλγόριθμος Layered ταξινομεί τους δίσκους σε επίπεδα και εκτελεί τον αλγόριθμο First-Fit ξεχωριστά για κάθε επίπεδο, χρησιμοποιώντας διαφορετικό σύνολο χρωμάτων για κάθε επίπεδο. Τα επίπεδα αριθμούνται με τους ακέραιους  $1, 2, \dots$  και κάθε δίσκος τοποθετείται στο μικρότερο δυνατό επίπεδο με τον περιορισμό ότι δε μπορεί να τοποθετηθεί σε κάποιο επίπεδο αν επικαλύπτεται με τουλάχιστον 16 αμοιβαία μη επικαλυπτόμενους δίσκους του επιπέδου αυτού.

**Λήμμα 44.** Για κάθε  $\sigma$ -φραγμένη ακολουθία δίσκων, ο αριθμός των επιπέδων που κατασκευάζονται από τον αλγόριθμο Layered είναι το πολύ  $1 + \log \sigma$ .

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την εκτέλεση του αλγορίθμου για μια  $\sigma$ -φραγμένη ακολουθία δίσκων. Θεωρούμε έναν δίσκο  $D_i$  του επιπέδου  $i > 1$  και έστω  $R$  η ακτίνα  $D_i$ . Μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος δίσκος με ακτίνα το

πολύ  $R/2$  στο επίπεδο  $i - 1$ . Ειδικότερα, έστω  $S$  ένα σύνολο 16 αμοιβαία μη επικαλυπτόμενων δίσκων του επιπέδου  $i - 1$  που επικαλύπτονται με το δίσκο  $D_i$ . Χρησιμοποιώντας ένα παραπλήσιο επιχείρημα με αυτό που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του Λήμματος 34, μπορούμε να δείξουμε ότι τουλάχιστον ένας από τους δίσκους του  $S$  έχει ακτίνα το πολύ  $R/2$ , διαφορετικά, είτε οι δίσκοι του συνόλου  $S$  δεν είναι αμοιβαία μη επικαλυπτόμενοι ή τουλάχιστον ένας από αυτούς δεν επικαλύπτεται με το δίσκο  $D_i$ .

Έστω  $j > 1$  το μεγαλύτερο επίπεδο που περιέχει δίσκους και έστω  $D_j$  ένας δίσκος του επιπέδου  $j$ . Αυτό σημαίνει ότι ένας από τους δίσκους του επιπέδου  $j - 1$  (έστω ο  $D_{j-1}$ ) με τον οποίο επικαλύπτεται ο  $D_j$  έχει ακτίνα το πολύ  $R/2$ . Χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα, Έχουμε ότι ένας δίσκος  $D_{j-2}$  του επιπέδου  $j - 2$  που επικαλύπτεται με τον  $D_{j-1}$  έχει ακτίνα το πολύ  $R/4$ , και, τελικά, ένας δίσκος  $D_1$  του πρώτου επιπέδου έχει ακτίνα  $r$  το πολύ  $R/2^{j-1}$ . Επομένως,  $\sigma \geq R/r \geq 2^{j-1}$  που συνεπάγεται ότι ο αριθμός των επιπέδων  $j$  είναι  $j \leq 1 + \log \sigma$ .  $\square$

**Θεώρημα 45.** *Ο αλγόριθμος Layered έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $O(\log \sigma)$  όταν εκτελείται για  $\sigma$ -φραγμένες ακολουθίες δίσκων.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε ότι ο αλγόριθμος Layered εκτελείται σε μια  $\sigma$ -φραγμένη ακολουθία δίσκων. Έστω  $j$  το επίπεδο στο οποίο έχει χρησιμοποιηθεί ο μέγιστος αριθμός χρωμάτων. Έστω  $\alpha$  το μεγαλύτερο χρώμα που έχει χρησιμοποιηθεί στο επίπεδο  $j$  και έστω  $D_j$  ο δίσκος που έχει χρωματιστεί με το χρώμα  $\alpha$ . Τότε, ο δίσκος αυτός επικαλύπτεται με τουλάχιστον  $\alpha - 1$  δίσκους του επιπέδου  $j$  που εμφανίστηκαν πριν από αυτόν. από τον ορισμό του αλγορίθμου, ο αριθμός των αμοιβαία μη επικαλυπτόμενων δίσκων του επιπέδου  $j$  που επικαλύπτονται με τον δίσκο  $D_j$  είναι το πολύ 15. Αυτό συνεπάγεται ότι ο βέλτιστος αλγόριθμος θα χρησιμοποιούσε τουλάχιστον  $\alpha/15$  χρώματα για το χρωματισμό των δίσκων της ακολουθίας ενώ, από το Λήμμα 44, ο αλγόριθμος Layered χρησιμοποιεί το πολύ  $\alpha(\log \sigma + 1)$  χρώματα, κι επομένως, έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης ο πολύ  $15(\log \sigma + 1)$ .  $\square$

Συνδυάζουμε τώρα τους αλγόριθμους First-Fit και Layered χρησιμοποιώντας μια τεχνική που προτάθηκε στις εργασίες [19, 20] για να πάρουμε καλύτερο αποτέλεσμα. Χρησιμοποιούμε δύο ξεχωριστά σύνολα χρωμάτων για τους αλγόριθμους First-Fit και Layered. Όταν εμφανίζεται ένας καινούριος δίσκος  $D_i$  εκτελούμε τον αλγόριθμο First-Fit για τον  $D_i$  και για τους δίσκους που έχουν χρωματιστεί από τον αλγόριθμο First-Fit. Όμοια, εκτελούμε τον αλγόριθμο Layered. Στη συνέχεια, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα αυτών των δύο αλγορίθμων και χρωματίζουμε το δίσκο  $D_i$  με τον αλγόριθμο που έχει χρησιμοποιήσει τα λιγότερα χρώματα μέχρι αυτό το σημείο (συμπεριλαμβανομένου

του χρώματος που χρησιμοποιήθηκε για το δίσκο  $D_i$ ). Ο συνολικός αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν είναι το πολύ ίσος με το άθροισμα των χρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν και από τις δύο μεθόδους. Σε κάθε χρονική στιγμή της εκτέλεσης του συνδυασμού των αλγορίθμων, ο αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν από τον αλγόριθμο **First-Fit** και ο αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν από τον αλγόριθμο **Layered** διαφέρουν το πολύ κατά ένα. Υποθέτουμε ότι  $n < \sigma$ . Ο αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν από τον αλγόριθμο **First-Fit** είναι το πολύ  $O(\log n)$  φορές μεγαλύτερος από το βέλτιστο αριθμό χρωμάτων. Ο αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν από τον αλγόριθμο **Layered** είναι το πολύ κατά ένα μεγαλύτερος από αυτόν του αλγορίθμου **First-Fit**. Επομένως, ο συνολικός αριθμός χρωμάτων είναι το πολύ  $O(\log n)$  φορές μεγαλύτερος από το βέλτιστο. Ένα παραπλήσιο επιχείρημα ισχύει και για την περίπτωση που  $n \geq \sigma$ . Καταλήγουμε στο ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 46.** Υπάρχει αλγόριθμος για *on-line* χρωματισμό ενός  $\sigma$ -φραγμένου γραφήματος δίσκων με  $n$  κορυφές που επιτυγχάνει συγκριτικό λόγο απόδοσης  $O(\min\{\log n, \log \sigma\})$ .



## Κεφάλαιο 5

# Συμπεράσματα - Μελλοντική έρευνα

Στην παρούσα διατριβή παρουσιάσαμε τεχνικές για αποδοτική επίλυση δύο θεμελιωδών γραφοθεωρητικών προβλημάτων: του προβλήματος εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων και του προβλήματος χρωματισμού γραφημάτων με στόχο την εφαρμογή των τεχνικών αυτών για την αποδοτική ανάθεση συχνοτήτων και τον αποδοτικό έλεγχο αποδοχής κλήσεων σε ασύρματα δίκτυα.

Μελετήσαμε την on-line εκδοχή και των δύο προβλημάτων με χρήση της μεθόδου συγκριτικής ανάλυσης. Θεωρήσαμε κυψελικές, επίπεδες και αυθαίρετες δικτυακές τοπολογίες. Για το πρόβλημα της ανάθεσης συχνοτήτων σε κυψελικά δίκτυα, βελτιώσαμε τον καλύτερο γνωστό συγκριτικό λόγο απόδοσης που ήταν τουλάχιστο 3 και χρησιμοποιώντας συγκριτική ανάλυση, αποδείξαμε ότι ο συγκριτικός λόγος απόδοσης του άπληστου αλγορίθμου είναι τουλάχιστο 2.429 και το πολύ 2.5.

Για το πρόβλημα ελέγχου αποδοχής κλήσεων σε κυψελικά δίκτυα, παρουσιάσαμε τον αλγόριθμο  $p$ -random, έναν πιθανοτικό αλγόριθμο που χρησιμοποιεί τυχαιότητα ανάλογη με το μέγεθος του δικτύου σε ασύρματα δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης 2 και αποδείξαμε ότι έχει καλύτερο συγκριτικό λόγο απόδοσης από τον αντίστοιχο ντετερμινιστικό. Συγκεκριμένα, αποδείξαμε ότι ο αλγόριθμος  $p$ -random πετυχαίνει συγκριτικό λόγο απόδοσης απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη που είναι μεταξύ του 2.469 και του 2.651. Η ανάλυσή μας μπορεί να επεκταθεί και σε αυθαίρετα δίκτυα. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την Αρχή Minimax του Yao (Yao's Minimax Principle) αποδείξαμε δύο κάτω φράγματα, 1.857 και 2.086 για το συγκριτικό λόγο απόδοσης πιθανοτικών αλγορίθμων ελέγχου αποδοχής κλήσεων, για κυψελικά και για αυθαίρετα επίπεδα δίκτυα, αντίστοιχα.

Βελτιώσαμε σημαντικά αυτό τα παραπάνω αποτελέσματα παρουσιάζοντας μια σειρά απλών πιθανοτικών αλγορίθμων που έχουν συγκριτικούς λόγους απόδοσης μικρότερους από 3, δουλεύουν για δίκτυα που υποστηρίζουν αυθαίρετα πολλές συχνότητες, και χρησιμοποιούν μόνο σταθερό αριθμό τυχαίων δυαδικών ψηφίων ή μια συγκριτικά ασθενή πηγή τυχαιότητας. Το καλύτερο πάνω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης που αποδείξαμε είναι  $7/3$ .

Για κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k > 2$ , παρουσιάσαμε απλούς πιθανοτικούς on-line αλγορίθμους ελέγχου αποδοχής κλήσεων με συγκριτικούς λόγους απόδοσης που βελτιώνουν σημαντικά τα κάτω φράγματα για τους συγκριτικούς λόγους απόδοσης των ντετερμινιστικών αλγορίθμων και χρησιμοποιούν μόνο  $O(\log k)$  τυχαία δυαδικά ψηφία. Επιπλέον, αποδείξαμε νέα κάτω φράγματα με τιμές  $25/12$ ,  $127/60$ , και  $2,5$  για τη συγκριτική απόδοση των on-line αλγορίθμων αποδοχής κλήσεων σε κυψελικά δίκτυα με απόσταση επαναχρησιμοποίησης  $k = 2, 3, 4$ ,  $k = 5$  και  $k \geq 6$ , αντίστοιχα.

Μελετήσαμε τις on-line εκδοχές των δύο θεμελιωδών γραφοθεωρητικών προβλημάτων, της εύρεσης μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου και του ελάχιστου χρωματισμού γραφημάτων, για την περίπτωση γραφημάτων δίσκων, δηλαδή γραφημάτων που προκύπτουν από τις τομές δίσκων στο επίπεδο. Σε γραφήματα δίσκων, τα προβλήματα εύρεσης μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου και ελάχιστου χρωματισμού είναι σημαντικά αφού μπορούν να χρησιμοποιηθούν σα μοντέλα για προβλήματα ανάθεσης πόρων σε ασύρματα δίκτυα επικοινωνιών[29]. Για το πρόβλημα εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων, εξετάσαμε το αν η χρήση τυχαιότητας βοηθά στην βελτίωση του συγκριτικού λόγου απόδοσης on-line αλγορίθμων. Αποδείξαμε ότι, γενικά, η χρήση τυχαιότητας δε βοηθάει απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη ακόμα και στην περίπτωση που δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων, δηλ., κατασκευάσαμε ακολουθίες δίσκων για τις οποίες κανένας (ακόμα και πιθανοτικός) on-line αλγόριθμος δε μπορεί να έχει συγκριτικό λόγο απόδοσης καλύτερο από  $\Omega(n)$ . Για την περίπτωση που δε δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων, αποδείξαμε ένα κάτω φράγμα  $\Omega(\min\{n, \sigma^2\})$  για το συγκριτικό λόγο απόδοσης on-line αλγορίθμων για  $\sigma$ -φραγμένα γραφήματα δίσκων με  $n$  κορυφές που σημαίνει ότι ο αλγόριθμος First-Fit είναι βέλτιστος ως προς ένα μικρό σταθερό παράγοντα. Για την περίπτωση  $\sigma$ -φραγμένων γραφημάτων δίσκων όταν δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων, παρουσιάσαμε πιθανοτικούς αλγόριθμους με συγκριτικό λόγο απόδοσης σχεδόν λογαριθμικό ως προς  $\sigma$  και αποδείξαμε ότι οι αλγόριθμοι αυτοί είναι βέλτιστοι. Για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων, παρουσιάσαμε έναν πιθανοτικό αλγόριθμο με συγκριτικό λόγο απόδοσης 4.41 (που είναι μικρότερος από το κάτω φράγμα με τιμή 5 για το συγκριτικό λόγο απόδοσης ντετερμινιστικών αλγορίθμων). Αποδείξαμε επίσης κάτω φράγματα με τιμές 2.5 και 3 για το συγκριτικό λόγο απόδοσης πιθανοτικών αλγορίθμων για γραφήματα μοναδιαίων δίσκων. Για το πρόβλη-



μα χρωματισμού, δείξαμε πώς μπορεί να επιτευχθεί το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα  $O(\min\{\log n, \log \sigma\})$  για  $\sigma$ -φραγμένες ακολουθίες  $n$  δίσκων ακόμα κι αν δε δίνεται η αναπαράσταση των δίσκων.

Η δουλειά μας αποκαλύπτει κάποια ενδιαφέροντα ανοιχτά προβλήματα, τόσο για το πρόβλημα κατανομής συχνοτήτων όσο και για το πρόβλημα ελέγχου αποδοχής κλήσεων.

Για το πρόβλημα κατανομής συχνοτήτων, το πιο ενδιαφέρον ανοιχτό ερώτημα είναι αν υπάρχει ντετερμινιστικός αλγόριθμος με συγκριτικό λόγο απόδοσης 2. Επιπλέον, η χρήση τυχειότητας μπορεί να οδηγήσει σε βελτιωμένα αποτελέσματα. Σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε, πιθανοτικοί αλγόριθμοι κατανομής συχνοτήτων δεν έχουν μελετηθεί στα πλαίσια των κυψελικών δικτύων, ούτε στην στατική ούτε στην on-line περίπτωση. Για την περίπτωση αυτή, το μόνο κάτω φράγμα το οποίο γνωρίζουμε είναι το  $4/3$  (που υπονοείται στην εργασία των Bartal και άλλων [8]).

Για το πρόβλημα ελέγχου αποδοχής κλήσεων, το βασικό ανοιχτό πρόβλημα είναι να κλείσει το χάσμα ανάμεσα στο άνω και το κάτω φράγμα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης των σχετικών αλγορίθμων. Η πιο ενδιαφέρουσα εκδοχή του προβλήματος αφορά πιθανοτικούς on-line αλγορίθμους σε ασύρματα κυψελικά δίκτυα με μικρή απόσταση επαναχρησιμοποίησης. Παρουσιάσαμε, επίσης, αλγορίθμους βασισμένους στο παράδειγμα “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής” χρησιμοποιώντας νέους χρωματισμούς του γράφου παρεμβολών. Αυτοί οι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν μικρό αριθμό τυχαίων δυαδικών ψηφίων, και έχουν μικρούς συγκριτικούς λόγους απόδοσης απέναντι σε αντιπάλους χωρίς μνήμη ακόμα και στην περίπτωση αυθαίρετα πολλών συχνοτήτων. Η προσέγγισή μας οδηγεί, σα φυσική συνέπεια, στη διατύπωση του ακόλουθου προβλήματος χρωματισμού. Σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε, το πρόβλημα αυτό δεν έχει μελετηθεί στο παρελθόν.

ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ ΞΕΝΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ ΚΛΙΚΩΝ ΣΤΗΓΜΙΟΤΥΠΟ: Ένα γράφημα  $G = (V, E)$  και ένας θετικός ακέραιος  $K$ .

ΕΡΩΤΗΣΗ: Υπάρχει ανάθεση με το πολύ  $K$  χρώματα στις κορυφές του  $G$  τέτοια ώστε κάθε συνεκτική συνιστώσα του υπογραφήματος του  $G$  που σχηματίζεται από κορυφές στις οποίες έχει ανατεθεί το ίδιο χρώμα να είναι κλίκα.

Αποδοτικές λύσεις για το πρόβλημα αυτό (άνω φράγματα για τον αριθμό των χρωμάτων και αποτελέσματα προσεγγισιμότητας για τη βελτιστοποιημένη εκδοχή του), ακόμα και για ιδιαίτερες κλάσεις γραφημάτων, θα μπορούσαν να δώσουν απλούς και αποδοτικούς ως προς το συγκριτικό λόγο απόδοσης on-line αλγορίθμους με βάση τον αλγόριθμο “ταξινόμησης και τυχαίας επιλογής”

σε γενικότερες δικτυακές τοπολογίες από αυτές που θεωρήσαμε στην παρούσα διατριβή.

Τα αποτελέσματα για το πρόβλημα εύρεσης ανεξάρτητου συνόλου ισχύουν επίσης και για γενικότερα προβλήματα όπου δίνονται  $w \geq 1$  χρώματα και σκοπός είναι ο χρωματισμός (αποδοχή) του μέγιστου αριθμού δίσκων που μπορούν να χρωματιστούν με το πολύ  $w$  χρώματα (προφανώς, για  $w = 1$ , έχουμε το πρόβλημα εύρεσης ανεξάρτητου συνόλου). Οι αλγόριθμοι **Classify**, **Guess**, και **Filter** μπορούν εύκολα να τροποποιηθούν για να λύνουν το πρόβλημα με τα ίδια φράγματα για το συγκριτικό λόγο απόδοσης που αποδείξαμε για το πρόβλημα εύρεσης ανεξάρτητου συνόλου. Οι τεχνικές μας μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες κατηγορίες γραφημάτων τομής, π.χ., γραφήματα τομής τετραγώνων. Το πιο ενδιαφέρον ανοιχτό πρόβλημα που σχετίζεται με το πρόβλημα εύρεσης ανεξάρτητων συνόλων είναι ίσως η εξάλειψη της διαφοράς μεταξύ του άνω και κάτω φράγματος για το συγκριτικό λόγο απόδοσης (πιθανοτικών) on-line αλγορίθμων σε γραφήματα μοναδιαίων δίσκων. Για τέτοια γραφήματα, θα ήταν πολύ ενδιαφέρουσα η εύρεση αλγορίθμου με συγκριτικό λόγο απόδοσης μικρότερο από 5 που να μην απαιτεί γνώση της αναπαράστασης των δίσκων. Για το πρόβλημα χρωματισμού, υπάρχει ακόμα μεγάλη απόκλιση (ως προς το  $\sigma$ ) ανάμεσα στο συγκριτικό λόγο απόδοσης του αλγορίθμου **Layered** (ή αλγορίθμων με τον ίδιο συγκριτικό λόγο απόδοσης που χρησιμοποιούν την αναπαράσταση των δίσκων) και στα γνωστά κάτω φράγματα.

# Βιβλιογραφία

- [1] B. Awerbuch, Y. Azar, A. Fiat, S. Leonardi, and A. Rosen. Competitive On-line Call Admission in Optical Networks. In *Proceedings of the 4th Annual European Symposium on Algorithms (ESA '96)*, LNCS 1136, Springer, pp. 431–444, 1996.
- [2] B. Awerbuch, Y. Azar, A. Fiat, S. Leonardi, and A. Rosen. On-line competitive algorithms for call admission in optical networks. *Algorithmica*, Vol. 31(1), pp. 29-43, 2001.
- [3] B. Awerbuch, Y. Bartal, A. Fiat, A. Rosen. Competitive Non-Preemptive Call Control. In *Proceedings of the 5th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '94)*, pp. 312–320, 1994.
- [4] P.K. Agarwal, M. Overmars, and M. Sharir. Computing maximally separated sets in the plane and independent sets in the intersection graph of unit disks. In *Proc. of the 15th Annual ACM/SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '04)*, 2004, to appear.
- [5] B. Baker. Approximation algorithms for *NP*-complete problems on planar graphs. *Journal of the ACM*, 41(1):153-180, 1994.
- [6] H. Breu. Algorithmic aspects of constrained unit disk graphs. *PhD Dissertation*, University of British Columbia, 1996.
- [7] A. Borodin and R. El-Yaniv. Online computation and competitive analysis. *Cambridge University Press*, 1998.
- [8] Y. Bartal, A. Fiat, and S. Leonardi. Lower Bounds for On-line Graph Problems with Applications to On-line Circuit and Optical Routing. In *Proc. of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '96)*, pp. 531–540, 1996.

- [9] T.M. Chan. Polynomial-time approximation schemes for packing and piercing fat objects. *Journal of Algorithms*, 46, pp. 178-189, 2003.
- [10] B. N. Clark, C. J. Colbourn, and D. S. Johnson. Unit disk graphs. *Discrete Mathematics*, 86(1-3):165-177, 1990.
- [11] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, and E. Papaioannou. On-line Call Control in Cellular Networks. *Foundations of Mobile Computing* (satellite workshop of FST&TCS '99), 1999.
- [12] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, and E. Papaioannou. Efficient On-Line Communication in Cellular Networks. In *Proc. of the 12th Annual ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures (SPAA '00)*, pp. 46-53, 2000.
- [13] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, and E. Papaioannou. Competitive Analysis of On-line Randomized Call Control in Cellular Networks. In *Proc. of the 15th International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS '01)*, 2001.
- [14] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, and E. Papaioannou. Randomized Call Control in Sparse Wireless Cellular Networks. In *Proc. of the 8th International Conference on Advances in Communications and Control (COMCON 01)*, pp. 73-82, 2001.
- [15] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, and E. Papaioannou. Efficient On-Line Frequency Allocation and Call Control in Cellular Networks. *Theory of Computing Systems*, Vol. 35, pp. 521-543, 2002.
- [16] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, and E. Papaioannou. Simple on-line algorithms for call control in cellular networks. In *Proc. of the 1st Workshop on Approximation and On-line Algorithms (WAOA '03)*, LNCS 2909, Springer, pp. 67-80, 2003.
- [17] I. Caragiannis, A. Fishkin, C. Kaklamanis, E. Papaioannou. On-line algorithms for disk graphs. In *Proc. of the 29th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS '04)*, LNCS 3153, Springer, pp. 215-226, 2004.
- [18] D. Dimitrijević and J. Vučetić. Design and performance analysis of algorithms for channel allocation in cellular networks. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 42(4): 526-534, 1993

- [19] T. Erlebach and J. Fiala. On-line coloring of geometric intersection graphs. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 9(1-2), pp. 3-24, 2002.
- [20] T. Erlebach and J. Fiala. Independence and coloring problems on intersection graphs of disks. In *Approximation and On-line Algorithms*, LNCS. Springer Verlag, 2004. To appear.
- [21] T. Erlebach and K. Jansen. The Maximum Edge-Disjoint Paths Problem in Bidirected Trees. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 14(3), pp. 326-355, 2001.
- [22] T. Erlebach, K. Jansen, and E. Seidel. Polynomial-time approximation schemes for geometric graphs. In *Proc. of the 12th Annual ACM/SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '01)*, pp. 671-679, 2001.
- [23] A.V. Fishkin. Disk graphs: a short survey. In *Proc. of the 1st International Workshop on Approximation and On-line Algorithms (WAOA '03)*, LNCS 2909, Springer, pp. 260-264, 2003.
- [24] J. Fiala, A.V. Fishkin, and F.V. Fomin. Off-line and on-line distance constrained labeling of graphs. In *Proc. of the 9th Annual European Symposium on Algorithms (ESA '01)*, LNCS 2161, pp. 464-475, 2001.
- [25] D. Fotakis, S. Nikolettseas, V. Papadopoulou and P. Spirakis. NP-completeness Results and Efficient Approximations for Radiocoloring in Planar Graphs. In *Proceedings of the 25th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2000)*, LNCS 1893, Springer, pp. 363-372, 2000.
- [26] A. Gräf. Coloring and recognizing special graph classes. *Musikinformatik und Medientechnik Bericht 20/95*, Johannes Gutenberg, Universität Mainz, 1995.
- [27] A. Gräf, M. Stumpf, and G. Weissenfels. On coloring unit disk graphs. *Algorithmica*, 20(3), pp. 277-293, 1998.
- [28] A. Gyárfás and J. Lehel. On-line and first fit colorings of graphs. *Journal of Graph Theory*, 12(2), pp. 217-227, 1988.
- [29] W.K. Hale. Frequency Assignment: Theory and Applications. In *Proceedings of the IEEE*, 68(12), pp. 1497-1514, 1980.

- [30] M.M. Halldórsson. Approximating discrete collections via local improvements. In *Proc. of the 6th Annual ACM/SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '95)*, pp. 160-169, 1995.
- [31] P. Hliněný and J. Kratochvíl. Representing graphs by disks and balls. *Discrete Mathematics*, 229(1-3), pp. 101-124, 2001.
- [32] D. Hochbaum. Efficient bounds for the stable set, vertex cover and set packing problems. *Discrete Applied Mathematics*, 6, pp. 243-254, 1983.
- [33] D. S. Hochbaum and W. Maass. Approximation schemes for covering and packing problems in image processing and VLSI. *Journal of the ACM*, 32(1):130-136, 1985.
- [34] H.B. Hunt III, M.V. Marathe, V. Radhakrishnan, S.S. Ravi, D.J. Rosenkrantz, and R.E. Stearns. NC-approximation schemes for NP- and PSPACE-hard problems for geometric graphs. *Journal of Algorithms*, 26(2), pp. 238-274, 1998.
- [35] S. Irani. Coloring inductive graphs on-line. *Algorithmica*, 11, pp. 53-72, 1994.
- [36] J. Janssen and K. Kilakos. Optimal multicolouring algorithms with limited recolouring. Submitted for publication, April 1995.
- [37] J. Janssen, K. Kilakos, and O. Marcotte. Fixed preference frequency allocation for cellular telephone systems. *IEEE Trans. Veh. Techn.* 48(2): 533-541, 1999.
- [38] J. Janssen, D. Krizanc, L. Narayanan, and S. Shende. Distributed On-Line Frequency Assignment in Cellular Networks. In *Proceedings of 15th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS '98)*, LNCS 1373, Springer, pp. 3-13, 1998.
- [39] J. Janssen, D. Krizanc, L. Narayanan, and S. Shende. Distributed On-Line Frequency Assignment in Cellular Networks. *Journal of Algorithms*, Vol. 36(2), pp. 119-151, 2000.
- [40] T. Kahwa and N. Georganas. A hybrid channel assignment scheme in large-scale cellular-structured mobile communication systems. *IEEE Transactions on Communications*. 4:432-438, 1978.
- [41] S. Kim and S. L. Kim. A two-phase algorithm for frequency assignment in cellular mobile systems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 1994.

- [42] S. Leonardi, A. Marchetti–Spaccamela, A. Prescutti, and A. Rosen. On–line Randomized Call–Control Revisited. In *Proceedings of the 9th Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '98)*, pp. 323–332, 1998.
- [43] L. Lovasz, M. Saks, and W. Trotter. An online graph coloring algorithm with sub-linear performance ratio. *Discrete Math*, 75:319-325, 1989.
- [44] E. Malesińska. Graph theoretical models for frequency assignment problems. *PhD Thesis*, Technical University of Berlin, 1997.
- [45] T. Matsui. Approximation algorithms for maximum independent set problems and fractional coloring problems on unit disk graphs. In *Discrete and Computational Geometry*, LNCS 1763, Springer, pp. 194-200, 2000.
- [46] M.V. Marathe, H. Breu, H.B. Hunt III, S.S. Ravi, and D.J. Rosenkrantz. Simple hueristics for unit disk graphs. *Networks*, 25, pp. 59-68, 1995.
- [47] R. Motwani and B. Raghavan. Randomized Algorithms. *Cambridge University Press*, 1995.
- [48] C. McDiarmid and B. Reed. Channel Assignment and Weighted Coloring. Manuscript, 1997.
- [49] L. Narayanan and S. Shende. Static Frequency Assignment in Cellular Networks. In *Proceedings of the 5th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO '97)*, pp. 215–227, 1997.
- [50] L. Narayanan and Y. Tang. Worst-Case Analysis of a Dynamic Channel Assignment Strategy. *Discrete Applied Mathematics* 140(1-3): pp. 115-141, 2004. Preliminary version in *Proceedings of the 4th International Workshop on Discrete Alforithms and Methods for Mobile Computing and Communications (DIALM 2000)*, 2000.
- [51] R. Peeters. On coloring  $j$ -unit sphere graphs. Technical report, Dept. of Economics, Tilburg University, 1991.
- [52] G. Pantziou, G. Pentaris, and P. Spirakis. Competitive Call Control in Mobile Networks. *Theory of Computing Systems*, Vol. 35(6), pp. 625-639, 2002. Preliminary version in *Proceedings of International Sympo-*

*sium on Algorithms and Computation (ISAAC '97)*, LNCS 1350, Springer, pp. 404–413, 1997.

- [53] P. Raymond. Performance analysis of cellular networks. *IEEE Transactions on Communications*. 39(12):1787-1793, 1991.
- [54] D. Sleator and R.E. Tarjan. Amortized Efficiency of List Update and Paging Rules. *Communications of Association of Computing Machinery* 28, pp. 202–208, 1985.
- [55] L. Trevisan. Non-Approximability Results for Optimization Problems on Bounded Degree Instances. In *Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '01)*, pp. 453–461, 2001.
- [56] Y.-T. Tsai, Y.-L. Lin, and F.R. Hsu. The on-line first-fit algorithm for radio frequency assignment problems. *Information Processing Letters*, 84, pp. 195-199, 2002.
- [57] S. Vishwanathan. Randomized online graph coloring. *Journal of Algorithms*, 13:657-669, 1992.
- [58] D. Wang and Y.-S. Kuo. A study on two geometric location problems. *Information Processing Letters*, 28:281-286, 1988.
- [59] P.-J. Wan and L. Liu. Maximal Throughput in Wavelength-Routed Optical Networks. Multichannel Optical Networks: Theory and Practice, *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, AMS, Vol. 46, pp. 15-26, 1998.
- [60] W. Wang and C. Rushforth. An adaptive local-search algorithms for the channel-assignment problem. Technical Report, August 1995.
- [61] A. C. Yao. Probabilistic Computations: Towards a Unified Measure of Complexity. In *Proceedings of the 17th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS '77)*, pp. 222–227, 1977.